(39)

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

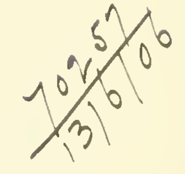
PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME PREMIER. — ANNÉE 1905.

(60e Volume de la Collection.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers;

Par M. Ludovic ZORETTI.

Introduction.

Les immortels travaux de Weierstrass sur la théorie des fonctions ([1]) avaient ouvert la voie aux recherches si fécondes et si intéressantes de M. G. Cantor sur la théorie des ensembles. En effet, la notion du *domaine d'existence* d'une fonction analytique s'associait naturellement à la notion de *point singulier* de cette fonction, c'est-à-dire de point *exclu* de ce domaine d'existence. Il était indispensable de classer tout d'abord ces ensembles de points avant même d'étudier l'allure de la fonction au voisinage de l'un d'eux. Cette classification est fournie d'une manière aussi satisfaisante que possible par la théorie des ensembles.

([1]) *Zur Functionenlehre Monatsberichte*, 1880.

La plus simple de toutes ces singularités est le point essentiel isolé de Weierstrass. Au voisinage d'un tel point, la fonction est complètement indéterminée, c'est-à-dire s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée. On sait même qu'elle prend une infinité de fois toute valeur donnée sauf exception pour deux valeurs au plus ([1]). Ces résultats ont été complétés par les travaux de MM. Poincaré, Hadamard, Borel et Boutroux ([2]).

Ces résultats entraînent une conséquence immédiate relative aux points limites de points singuliers isolés. Quelque compliquées que soient les singularités voisines du point étudié, qu'il appartienne même à une coupure ou à un ensemble parfait, pourvu qu'il existe dans son voisinage une infinité de points isolés tendant vers lui, les résultats précédents subsistent.

Deux cas ne rentrent pas dans celui-là. Le premier est celui où le point appartient à une coupure. Dans ce cas toutes les circonstances possibles peuvent se présenter, depuis l'indétermination complète jusqu'à la continuité de la fonction et de toutes ses dérivées (d'un côté de la coupure). Le seul cas qui reste en suspens est donc celui d'un ensemble parfait *discontinu* de points singuliers.

Tout ce que l'on peut affirmer dans ce cas c'est que, dans un cercle entourant le point étudié, il est impossible que la fonction soit continue et ait une dérivée. Dire cela, c'est dire que la fonction n'est pas holomorphe dans le cercle ou, ce qui revient au même, c'est dire qu'elle y admet un point singulier. Mais la question reste entière. Doit-on penser qu'ici encore toutes les circonstances peuvent se présenter comme dans le cas de la coupure, ou au contraire peut-on espérer qu'il existe un théorème aussi précis que celui de Weierstrass ou de M. Picard? L'indétermination est-elle complète ou incomplète? Peut-il y avoir, au contraire, continuité, la singularité ne se manifestant que sur la dérivée? Le seul fait qu'une telle question soit encore posée au début même de la théorie des fonctions indique assez combien la solution de ce problème doit présenter de difficultés.

([1]) Picard, *Annales de l'École Normale*, 1880.

([2]) Poincaré, *Bulletin de la Société mathématique*, 1883. — Hadamard, *Journal de Mathématiques*, 1892-1893. — Borel, *Fonctions entières*. Gauthier-Villars, 1899. — Boutroux, Thèse, *Acta*, t. XXVIII.

Je suis parvenu dans cet ordre d'idées à un résultat qui, bien qu'incomplet encore, me paraît digne d'intérêt et susceptible d'applications : *Étant donnée une fonction uniforme qui dans une aire* Δ (*si petite qu'elle soit*) *admet un ensemble discontinu de singularités, la fonction est certainement discontinue en quelque point de cette aire*. Je n'ai pu, malgré tous mes efforts, démontrer que l'indétermination de la fonction est complète, quoique cette proposition paraisse bien vraisemblable.

La démonstration que j'ai donnée paraîtra bien compliquée au premier abord, mais il est facile de s'assurer que cette complication est dans la nature même de la question. La difficulté principale que l'on rencontre réside dans la distinction des ensembles continus et des ensembles parfaits discontinus. On se rendra compte en lisant la première Partie, consacrée à l'étude de ces ensembles, que leurs propriétés sont très voisines.

J'ajoute que, contrairement à ce qu'on pourrait penser, les fonctions affectées de telles singularités se présentent dans les questions les plus naturelles. Telles sont, par exemple, les fonctions fuchsiennes de la troisième famille, qui sont définies à la fois par des propriétés fonctionnelles très simples et par une équation différentielle algébrique du troisième ordre.

Mais un problème beaucoup plus simple encore où le théorème énoncé plus haut joue un rôle essentiel est un problème indiqué jadis par M. Painlevé concernant les équations différentielles du premier ordre.

Étant donnée une équation différentielle du premier ordre algébrique en y' et en y et analytique en x, M. Painlevé a élucidé le cas où l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à un nombre *déterminé* n de branches, en entendant par là que, sauf peut-être pour une infinité *dénombrable* de valeurs de la constante, une intégrale quelconque a n branches. Il a démontré que l'intégrale dépend alors algébriquement de la constante et se ramène à une équation de Riccati ou aux quadratures.

Il semble naturel de donner au problème une autre forme et d'étudier le cas où l'intégrale générale $y(x)$ est une fonction à n branches *au plus*. Si on ne fait aucune hypothèse sur les coefficients de l'équa-

tion, l'intégrale ne rentre pas nécessairement dans la catégorie précédente; même dans le cas de $n = 2$, elle pourra être une fonction transcendante (à une infinité de déterminations) *de la constante*, et, suivant que cette constante sera dans telle ou telle région du plan, la fonction $y(x)$ sera une fonction uniforme ou une fonction à deux branches.

Mais, si nous imposons aux coefficients la condition d'être *algébriques* en x, le deuxième problème rentre-t-il dans le premier? Autrement dit, la question qui se pose est la suivante : *Étant donnée une équation du premier ordre algébrique en* y', y, *étudier le cas où toute intégrale* $y(x)$ *est une fonction à n branches au plus*. Tel est le problème posé par M. Painlevé et que je suis parvenu à résoudre complètement, en faisant jouer à mon théorème un rôle fondamental.

Je signale encore quelques autres applications et certaines questions non encore résolues se rattachant directement au problème traité dans ce Mémoire.

Ces applications suffiront, je pense, à montrer l'utilité de ce théorème et à appeler l'attention des chercheurs sur l'intérêt qu'il y aurait à le compléter.

Je ne veux pas terminer ce travail sans adresser mes remerciements à tous mes maîtres de l'École Normale dont la sollicitude à mon égard ne s'est jamais ralentie et dont les encouragements m'ont été si précieux. D'ailleurs, dans ce milieu normalien tout ce qui vous entoure est un enseignement, et je suis heureux de pouvoir dire le bénéfice que j'ai retiré des quelques années que j'y ai passées.

CHAPITRE I.

LES ENSEMBLES PARFAITS PLANS.

1. La plupart des géomètres qui se sont occupés des ensembles parfaits se sont, en général, limités au cas des ensembles rectilignes. Un grand nombre de propriétés de ceux-ci pouvaient d'ailleurs s'étendre immédiatement au cas de plusieurs dimensions. Mais une étude particulière de ce cas révèle l'existence de certaines propriétés nouvelles que l'étude des ensembles rectilignes ne pouvait faire con-

naître, parce qu'elles perdaient, pour ceux-ci, leur signification ou leur intérêt. Une étude approfondie des ensembles à deux dimensions, par exemple, est à désirer; elle serait certainement féconde en surprises et en applications, comme d'ailleurs tout ce qui touche aux ensembles. Il ne faut pas se dissimuler que les difficultés y seraient nombreuses, et l'extrême rigueur que nécessitent les raisonnements n'est pas une des moindres.

Les quelques pages qui vont suivre n'ont pas la prétention d'être même l'ébauche d'une telle étude. J'ai seulement dû préciser, dans leur énoncé ou leur démonstration, certaines propriétés qui m'étaient indispensables dans la suite. J'y ai joint la démonstration de quelques propositions nouvelles qui m'ont paru intéressantes.

J'appelle ensemble *fermé* un ensemble *qui contient* son dérivé, et ensemble *parfait* un ensemble *identique* à son dérivé. On peut donner de ces ensembles un grand nombre d'exemples. Mais il est important d'indiquer un procédé permettant de les construire *tous*.

Soient E un ensemble *fermé*, *a* un point extérieur à E. On peut entourer *a* d'un cercle ne contenant à son intérieur ([1]) aucun point de E. Le rayon de ce cercle a une limite supérieure ρ. Sur le cercle C de centre *a* et de rayon ρ il y a au moins un point de E, car, dans le cas contraire, tout point de C serait centre d'un cercle ne contenant aucun point de E et un raisonnement bien connu montrerait que la limite inférieure des rayons de ces cercles n'est pas nulle. Il y aurait donc un cercle de centre *a* et de rayon plus grand que ρ ne contenant aucun point de E.

Ceci posé, supposons que E soit *borné* ([2]). Je dis qu'on peut obtenir E en excluant du plan les points intérieurs à un au moins des cercles d'une suite dénombrable de cercles.

D'abord on peut trouver un cercle C de rayon R contenant à son intérieur tous les points de E. J'exclus les points extérieurs à C. A tout point restant qui n'appartient pas à E répond, on vient de le voir, un nombre *r* que l'on peut appeler la *distance de ce point à l'ensemble* E.

([1]) Le mot *intérieur* est toujours pris dans son sens étroit.

([2]) On peut toujours se ramener à ce cas pourvu que E ne comprenne pas tout le plan.

Considérons ceux de ces points pour lesquels on a $r \geqq \frac{R}{2}$. Prenons-en un au hasard. Traçons le cercle qui lui correspond; prenons-en un autre sur ce cercle ou à son extérieur, traçons le cercle qui lui correspond et ainsi de suite. Nous tracerons ainsi un nombre fini de cercles car les distances de leurs centres sont toutes supérieures à $\frac{R}{2}$. Pour tous les points de C qui ne sont pas intérieurs à un au moins d'entre eux le nombre r est inférieur à $\frac{R}{2}$. Considérons ceux pour lesquels il est $\geqq \frac{R}{4}$. Opérons de même pour ces points. En considérant ainsi successivement ceux des points restants pour lesquels le nombre r est supérieur à $\frac{R}{2^3}, \frac{R}{2^4} \cdots$ nous obtenons à chaque fois un nombre fini de cercles et par suite une infinité dénombrable de cercles. Tout point intérieur à C n'appartenant pas à E est intérieur à un au moins d'entre eux, car si le nombre r qui lui correspond est supérieur à $\frac{R}{2^n}$ il ne peut être extérieur aux cercles qui se trouvent avoir été tracés après la $n^{\text{ième}}$ opération. D'ailleurs, un point de E ne peut être intérieur à aucun de ces cercles. Donc l'ensemble des points restant se confond avec E.

Inversement, si l'on exclut d'un cercle C les points intérieurs à un des cercles d'une infinité dénombrable de cercles, l'ensemble restant contient son dérivé, car si un point est exclu il en est de même d'un certain entourage de ce point.

2. Cette démonstration appelle plusieurs remarques. D'abord nous pouvons répéter l'observation faite par M. Borel dans le cas des ensembles rectilignes sur l'étendue de la restriction que l'on apporte à la notion d'ensemble en se bornant aux ensembles fermés. En second lieu, il y a un rapprochement intéressant à faire du théorème précédent et de celui qui a été démontré par MM. Volterra et Poincaré [1] sur les fonctions analytiques. *Dans le cas des fonctions uniformes* ce

(1) Poincaré, *Rendiconti di Palermo*, t. II. — Volterra, *Atti dei Lincei. Rendiconti*, t. IV.

théorème nous apprend qu'on peut tracer une infinité dénombrable de cercles contenant à leur intérieur les points réguliers de la fonction et à leur extérieur ou sur leur contour les points singuliers. Mais il ne faut pas conclure à l'identité des deux résultats précédents, car un ensemble fermé quelconque ne peut pas toujours constituer l'ensemble singulier d'une fonction uniforme. Il suffit, pour s'en persuader, de considérer l'ensemble des points situés sur trois cercles concentriques. On peut penser qu'en considérant *plusieurs* fonctions analytiques on arrivera à démontrer notre théorème; cela est probable, mais il faudrait alors en considérer une infinité dénombrable et, d'autre part, supposer connu le théorème analogue relatif aux ensembles rectilignes. Il est évidemment plus simple de procéder directement.

3. Je m'attacherai surtout à la distinction entre les ensembles parfaits *continus* et *discontinus*. Un ensemble fermé étant égal à un ensemble parfait augmenté d'un ensemble dénombrable (¹), il est bien naturel de se limiter aux ensembles parfaits. D'ailleurs, si l'on raisonnait sur les ensembles fermés, on n'exclurait pas le cas des ensembles dénombrables et il pourrait en résulter une gêne dans les démonstrations.

M. Cantor appelle *continu* un ensemble parfait bien enchaîné (*zusammenhängend*), c'est-à-dire tel qu'étant donnés deux points de l'ensemble et un nombre ε, on peut trouver une succession de points de l'ensemble, contenant ces deux points, tels que la distance de chacun au précédent et au suivant soit inférieure à ε, et cela quel que soit ε. Si, pour deux points au moins de l'ensemble, cette propriété n'a pas lieu, l'ensemble est *mal enchaîné*. Un ensemble parfait mal enchaîné est dit *discontinu*. Nous dirons qu'un ensemble parfait est *partout discontinu* quand la propriété précédente n'a lieu pour aucun couple de deux points.

Un continu est dit *superficiel* quand il contient des points non frontières, c'est-à-dire des points dont un certain entourage appartient à l'ensemble; il est *linéaire* quand tous ses points sont frontières. Ce n'est pas ici le lieu d'étudier les rapports entre les notions vulgaires

---

(¹) Bendixson, *Acta mathematica*, t. II.

de *ligne* et d'*aire* et les notions d'ensembles continus linéaires ou superficiels. Les travaux de M. Cantor ont montré que, si le continu et le discontinu peuvent, par la notion de puissance, se ramener « à une commune mesure », leur distinction permet d'élucider la notion ordinaire de continu et que ce n'est là « ni une idée indécomposable, ni une intuition *a priori* ». Je m'autoriserai de ces travaux pour appeler *ligne cantorienne* ou même *ligne* un ensemble continu linéaire.

Je démontrerai d'abord un théorème qui joue dans la suite un rôle important et qui a été démontré par M. Painlevé dans son Cours de l'École Normale en 1902. Ce théorème étant inédit, je crois devoir le démontrer ici en le complétant sur certains points.

Considérons un ensemble de points E_α dépendant d'un paramètre α que nous supposerons réel et qui tendra vers α_0. Je dirai qu'un point a appartient à l'ensemble limite de E_α si, quelque petits que soient les deux nombres r et ε, sous la condition $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, le cercle de centre a et de rayon r renferme des points appartenant à certains des E_α. L'ensemble des points a s'il en existe est l'ensemble limite E. Je dis que *si les ensembles* E_α *sont continus et si chacun d'eux contient tous ceux qui correspondent aux valeurs ultérieures de* α, *l'ensemble limite* E *est continu ou se réduit à un point.*

Supposons que E comprenne au moins deux points a et b. L'ensemble E étant fermé, il suffira de montrer qu'il est bien enchaîné. Or, s'il était mal enchaîné, on pourrait trouver un nombre ε tel qu'en traçant tous les cercles de rayon ε ayant pour centres les différents points de E, on ne puisse trouver un ensemble continu de points joignant a et b et restant à l'intérieur de ces cercles. On ne pourra donc pas non plus trouver un continu dont tous les points soient intérieurs à l'un au moins de ces cercles, et joignant deux points a_1, b_1 distants l'un de a l'autre de b de moins de ε. Or, pourvu que α soit suffisamment voisin de α_0, l'ensemble E_α contiendra deux tels points (E_α contient même a et b). Et il y aurait donc des points de E extérieurs à tous ces cercles ou sur leur contour, ce qui est absurde. Le théorème est donc démontré.

La forme même sous laquelle j'ai présenté la démonstration montre qu'il est inutile de supposer que tous les ensembles E_α contiennent les

points a et b. Pour qu'elle subsiste néanmoins il est nécessaire qu'il existe au moins un point a qui soit limite pour *tous* les E_α; j'entends par là que pour *toutes* les valeurs de α suffisamment voisines de α_0 les E_α ont des points aussi voisins qu'on veut de a. Alors E, s'il ne se réduit pas à a, contient au moins un autre point b et il n'est pas nécessaire pour le raisonnement que b soit limite de *tous* les E_α; il suffit qu'il existe *des* valeurs de α tendant vers α_0 telles que les E_α correspondants aient des points tendant vers b.

Mais, s'il n'existe aucun point a limite de *tous* les E_α, le théorème peut être en défaut. Par exemple, si E_α est un cercle de rayon α ayant pour centre le point *zéro* si α est commensurable, le point *un* si α est incommensurable, l'ensemble E se compose des deux points 0, 1 quand α tend vers zéro.

J'aurai besoin, dans la suite, du théorème complété comme je viens de le faire. Quant au théorème énoncé en premier lieu, il permet d'abréger une démonstration due à M. Phragmèn [1] du théorème suivant : *Si* P *est la frontière d'un continuum* A, *et s'il existe des points* extérieurs *à* A, *une partie de* P *est continue*. Il est facile au moyen du théorème précédent de compléter cet énoncé et de mettre à l'abri de toute critique certains points de rigueur de la démonstration de M. Phragmèn. Voici le résultat auquel on parvient : Soit un continuum A ou plutôt appelons A le dérivé d'un continuum donné. L'ensemble des points frontières de A est constitué par une infinité *dénombrable* de *lignes*, et si L est une de ces lignes, on peut trouver deux points a, b dont un seul appartenant à A qu'il est impossible de joindre sans rencontrer L. Autrement dit, L est une ligne fermée. En particulier, si A est *borné*, l'ensemble des points extérieurs à A forme plusieurs continua dont l'un, B, comprend le point à l'infini ; la frontière de ce continuum B, qui est une portion de la frontière de A et que nous appellerons *frontière extérieure* de A, est une ligne cantorienne fermée.

4. Étudions maintenant les ensembles partout discontinus. Un point d'un tel ensemble peut être entouré d'un contour fermé et ne passant

(1) *Acta*, t. VII.

par aucun point de l'ensemble intérieur à un cercle aussi petit qu'on veut ayant le point donné pour centre. Je démontrerai le théorème plus général suivant : Soit a un point appartenant à une portion *continue* P d'un ensemble fermé E. Les points qui sont à une distance de P inférieure ou égale à μ forment un continuum C dont la frontière est une ligne L. Considérons les points de E extérieurs à C et leurs points limites (ce qui peut ajouter certains points de L). Soit F l'ensemble obtenu. A chaque couple formé par un point de P et un point de F répond un nombre ε tel qu'on ne puisse former une chaîne de points de E contenant les points considérés et à chaînons plus petits que ε. Si l'on considère un point de P et tous les points de F la limite inférieure des nombres ε obtenus n'est pas zéro, car si elle était zéro on trouverait, suivant un raisonnement bien connu, un point tel que, pour tous les points de F suffisamment voisins de lui, ce nombre serait aussi petit qu'on voudrait. Or ce point, limite de points de F, appartient à F puisque F est fermé; donc il lui correspond une certaine valeur de ε, soit η et pour tous les points qui sont à une distance de lui moindre que η le nombre ε est au moins égal à η et, par suite, n'a pas zéro pour limite inférieure. Pour chaque point de P nous obtenons donc une limite inférieure différente de zéro. On voit de même que, si l'on considère tous les points de P, la limite inférieure de toutes les limites correspondantes est un nombre différent de zéro que j'appellerai ε. Traçons alors de tous les points de E comme centres des cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$. Ces cercles forment plusieurs continua dont l'un renferme tous les points de P à son intérieur. Ce continuum est d'ailleurs tout entier à l'intérieur de L. Sa frontière extérieure est donc une ligne fermée entourant P (sans contenir aucun point de E). J'ai donc établi qu'*on peut trouver une ligne fermée comprenant à son intérieur tous les points de* P, *ne passant par aucun point de* E *et dont tout point est à une distance de* P *inférieure à une quantité donnée quelconque* μ.

Dans cet énoncé, le mot *ligne* est entendu dans son sens le plus général. Mais tout point de cette ligne est à une distance ρ de l'ensemble E et pour tous les points de la ligne la limite inférieure des nombres ρ est différente de zéro d'après le même raisonnement. On

peut donc considérer au lieu d'une ligne une *zone* fermée jouissant des mêmes propriétés que la ligne ci-dessus. Tout ensemble continu entourant P et situé dans la zone jouit encore des mêmes propriétés. On peut donc toujours supposer que l'on prend dans l'énoncé précédent une ligne analytique ayant en chaque point une tangente et même une courbure continues. Cela a une certaine importance si l'on veut faire des intégrations sur la ligne ([1]), ou simplement si l'on veut se déplacer sur elle dans un certain sens, expression qui n'a pas toujours de signification pour une ligne cantorienne quelconque.

5. Je terminerai cette étude préliminaire par la démonstration de deux théorèmes qui ne me serviront d'ailleurs pas. J'ai cherché pendant longtemps sans y parvenir à utiliser le premier dans la démonstration du théorème qui fait l'objet du Chapitre suivant, et je tiens à le signaler parce que je le crois de nature à simplifier notablement cette démonstration. Voici ce théorème :

Théorème. — *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles discontinus ne peut contenir une portion continue.*

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles donnés, S leur somme. Supposons qu'elle contienne un continu σ. Il y a dans σ un point au moins extérieur à E_1 et par suite ce point peut être entouré d'un cercle contenant des points de σ, mais aucun des points de E_1. L'ensemble des points de σ qu'il contient est d'ailleurs continu. Dans ce cercle on peut en trouver de même un second sans point de E_2 et contenant une portion continue de σ. En continuant ainsi nous obtenons une suite dénombrable de cercles qui ont visiblement au moins un point limite a. Ce point appartient à σ, car tous les cercles contiennent des points de σ et σ est parfait. D'autre part il ne peut appartenir à aucun ensemble E_n, car il est intérieur à tous les cercles, en particulier au $n^{\text{ième}}$ cercle qui ne contient pas de point de E_n. Il y a donc contradiction.

D'ailleurs S n'est pas forcément fermé ; son dérivé peut être continu.

([1]) Observons, ce qui restreint beaucoup la portée de cette remarque, que la démonstration ne nous apprend rien sur la longueur de cette ligne. Elle peut ne pas tendre vers zéro avec μ.

Considérons par exemple une fonction uniforme ayant une coupure ne renfermant aucun arc de cercle. Tous les points réguliers de la fonction pourront être enfermés dans une infinité dénombrable de cercles dont aucun ne contiendra de ligne singulière. Sur chaque cercle se trouve un ensemble de points singuliers. La somme de tous ces ensembles ne comprendra aucune ligne et pourtant son dérivé en contiendra une.

On démontre de même qu'une infinité dénombrable de continus linéaires ne saurait contenir un continu superficiel.

6. Je terminerai ce Chapitre en démontrant une propriété plus curieuse qu'importante des ensembles discontinus. C'est la propriété suivante :

Théorème. — *Étant donné un ensemble partout discontinu, on peut trouver une ligne contenant tous les points de l'ensemble.*

Soit E l'ensemble donné supposé borné. Traçons de tous les points de E comme centres des cercles de rayon ε. Les points intérieurs à ces cercles formeront un nombre fini de continua C_1, C_2, ..., C_p. Considérons la frontière extérieure de chacun d'eux et parmi ces p lignes fermées excluons celles qui sont entièrement intérieures à une des autres. Joignons les lignes restantes A par des lignes arbitraires M dont chacune est limitée à deux A, et qui ne coupent aucune des autres A ni aucune des M. Soit a un point extérieur à E. Si ε est assez petit, a sera extérieur aux C_i. Si nous supposons qu'aucune des M ne passe par a, ce point définit un continuum, savoir l'ensemble des points qu'on peut joindre à a sans rencontrer ni les M ni les A. Le continuum obtenu en joignant à celui-là les points *intérieurs* [1] aux lignes A admet une frontière qui est une ligne fermée comprenant tous les M et des portions de tous les A.

Donnons à ε une valeur plus petite, nous aurons un autre continuum. Quand ε tend vers zéro, ce continuum tendra vers un ensemble continu limite, car tous les points de E sont intérieurs à ce continuum. La fron-

[1] Au sens de M. Jordan.

tière de ce continu limite est une ligne A. Je dis qu'elle contient tous les points de E.

En effet, si α est un point de E ou bien, pour une valeur assez petite de ε, il sera à une distance aussi petite que l'on voudra d'une ligne A et alors il appartiendra à A ; ou bien, quel que soit ε, il y aura toujours un continuum C_i enveloppant le point α et dont tous les points ne tendront pas vers α. Comme la limite de C_i est continue et comprend *exclusivement* des points de E, c'est là une conséquence absurde. Le théorème est donc démontré.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

1. Étant donnée une fonction analytique *uniforme*, l'ensemble de ses points singuliers E, qui est un ensemble fermé, peut affecter l'une des trois formes suivantes :

1° Il est dénombrable; il contient alors des points isolés;

2° Il contient un ensemble parfait, mais aucun ensemble continu;

3° Il contient des ensembles continus, lignes ou aires.

Si l'on veut étudier la façon dont se comporte la fonction au voisinage d'un point singulier donné, on sera conduit à faire jouer le rôle important à celles des singularités qui sont voisines du point donné. Si l'on entoure ce point d'un cercle, ou bien le rayon de ce cercle pourra être pris assez petit pour que les points singuliers qui lui sont intérieurs forment un ensemble dénombrable, ou bien quelque petit que soit ce rayon cet ensemble ne sera jamais dénombrable; dans ce dernier cas, ou bien le rayon pourra être pris assez petit pour que cet ensemble soit *partout* discontinu, ou bien il contiendra un ensemble continu quelque petit que soit le rayon du cercle. Un point singulier z_0 donné sera, suivant que l'on est dans tel ou tel de ces trois cas, dit *appartenir* à un ensemble dénombrable, discontinu ou continu ([1]) de points singuliers.

([1]) Dans ce dernier cas il n'existe pas nécessairement de ligne singulière pas-

Dans le premier cas, le théorème de M. Picard, qu'on généralise aisément en suivant la voie indiquée par M. Borel, donne des renseignements d'une grande précision sur l'allure de la fonction. Dans le dernier, des exemples très simples permettent de montrer que les circonstances les plus variées peuvent se présenter : la fonction, ainsi que toutes ses dérivées, ou seulement un certain nombre d'entre elles, peuvent être continues ou simplement déterminées quand z tend d'une façon quelconque vers un point appartenant à une ligne singulière ; la fonction peut au contraire être plus ou moins complètement indéterminée dans les mêmes conditions ([1]). De plus, si l'on se donne à l'avance la forme des coupures, on peut former des exemples de tous ces cas, quelle que soit cette forme. Si l'on veut, l'allure de la fonction ne dépend pas de la forme des coupures ([2]).

2. Le cas intermédiaire, celui d'un point z_0 appartenant à un ensemble discontinu, était resté jusqu'à présent très mal connu. Si ce point est limite de points isolés, on peut affirmer que le théorème de M. Picard s'applique : au voisinage du point la fonction prend une infinité de fois toute valeur donnée sauf exception pour deux valeurs au plus. Mais si, à l'intérieur d'un cercle c de centre z_0, l'ensemble singulier est parfait, ce théorème n'est pas toujours vrai. M. Painlevé subdivise ce cas en trois. En entourant chacun des points singuliers d'un contour ne passant par aucun d'eux et en appelant λ la limite de la somme des longueurs de ces contours quand leurs diamètres tendent vers zéro, cette limite pourra être (pour un choix convenable de ces

---

sant par z_0 ; d'après la définition, ce point peut être simplement *limite* de lignes singulières. C'est ce qui arrive pour la fonction $\sum \frac{\varphi(nz)}{n^2}$ pour $z = 0$ en posant $\varphi(z) = \sum \frac{e^{-p-q}}{p(z-1)-qi}$; q et p étant des entiers tels que $\frac{q}{p} < 1$.

([1]) Des exemples nombreux ont été donnés de tous ces cas. On trouvera des détails à ce sujet dans une thèse soutenue à l'Université John Hopkins par M. J. Eiesland (Baltimore, 1898).

([2]) Autrement dit, le *domaine d'indétermination* peut être quelconque. Pour la définition de cette expression, *voir* PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, t. CXXXI, p. 489.

contours) nulle, finie ou infinie. Dans le premier cas z_0 sera dit *appartenir à un ensemble ponctuel;* dans le second *à un ensemble semi-linéaire;* dans le troisième *à un ensemble semi-superficiel,* et M. Painlevé a démontré dans le premier cas que la fonction s'approche autant qu'on veut de toute valeur donnée au voisinage du point singulier considéré, et dans le second qu'elle ne peut pas être continue dans une aire, si petite qu'elle soit, contenant le point donné. Mais le troisième cas a jusqu'à présent échappé à toutes les tentatives.

Dans ce cas en effet les méthodes basées sur l'intégrale de Cauchy qui avaient réussi dans les deux premiers ne permettent plus de conclure. On est alors obligé d'étudier, avec les seules ressources de la théorie des ensembles et en se basant uniquement sur le prolongement analytique, la relation établie entre les deux points z et w par la fonction $w = f(z)$ et en particulier on est conduit à considérer la fonction inverse $z = \psi(w)$ qui est une fonction analytique à une infinité de branches. Or, on sait quelles précautions minutieuses exige tout raisonnement sur ces fonctions. Un raisonnement sans rigueur montre immédiatement que dans le cas général la fonction se comporte comme dans le cas d'un ensemble ponctuel (1). Mais, si l'on cherche à rendre rigoureuses ces considérations, on tombe sur des difficultés qui jusqu'à présent n'ont pu être surmontées.

On verra dans la suite de quelle nature sont ces difficultés; elles se retrouvent en partie dans la démonstration du théorème suivant qui fait le principal objet de ce travail :

Théorème A. — *Étant donnée une fonction uniforme qui dans une aire Δ admet un point singulier faisant partie d'un ensemble discontinu de singularités, la fonction est certainement discontinue en quelque point de cette aire.*

Autrement dit, tout point z_0 faisant partie d'un ensemble discontinu de points singuliers est un point transcendant *essentiel* ou un point *limite de points essentiels* (2).

---

(1) Ce raisonnement se trouve indiqué en note dans les *Leçons de Stockholm,* p. 438.

(2) M. Painlevé appelle *point transcendant ordinaire* un point pour lequel

3. *Démonstration du théorème A. — Théorèmes préliminaires.* — J'aborde donc la démonstration de ce théorème. Soit une fonction $f(z)$ qui admet un point singulier z_0 faisant partie d'un ensemble discontinu de singularités. Je suppose que cette fonction soit continue dans une aire D contenant le point z_0 à son intérieur et je veux démontrer que cela est absurde.

La fonction $f(z)$ peut admettre en dehors de D des singularités de nature quelconque, points ou lignes, mais je vais démontrer qu'*on peut toujours lui substituer une fonction qui soit continue* dans tout le plan *et qui admette pour* toutes *singularités un ensemble discontinu*.

Je puis d'abord toujours supposer que la valeur de la fonction $f(z)$ au point z_0 est finie. Il suffirait dans le cas contraire de remplacer la fonction $f(z)$ par $\frac{1}{f(z)}\cdot$ Cela posé, je remplace l'aire D par une aire Δ qui lui soit entièrement intérieure et remplissant les trois conditions suivantes :

1° Son contour c ne passe par aucun point singulier;

2° Δ contient à son intérieur un ensemble discontinu de points singuliers et parmi eux le point z_0 et ne contient aucun autre point singulier;

3° La fonction $f(z)$ (qui est finie au point z_0) sera *finie* dans Δ et par suite *bornée* puisqu'elle est continue.

Il est évidemment possible de faire choix d'une telle aire Δ. Déformons alors le contour c d'une façon continue sans jamais rencontrer de point singulier. Soit γ une position de ce contour. Dans l'aire comprise entre c et γ la fonction $f(x)$ est holomorphe et, par suite, elle

---

le domaine d'indétermination est réduit à un point et point *essentiel* un point pour lequel cette condition n'est pas remplie. La définition convient aux fonctions multiformes. Pour les fonctions uniformes les seuls points transcendants qui puissent être ordinaires appartiennent à des coupures ou à des ensembles parfaits discontinus, quoique ce dernier cas ne puisse vraisemblablement pas se présenter. Les points essentiels se divisent eux-mêmes en points *essentiels proprement dits* et points *semi-essentiels,* ce dernier cas étant celui où la fonction tend vers une limite si le chemin que suit la variable ne tourne pas indéfiniment autour du point singulier : ainsi $x = 0$ pour la fonction $y = x \log x$.

est donnée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-x} = g(x) + F(x).$$

La fonction $g(x)$ est holomorphe et par suite continue à l'intérieur de γ. La fonction $F(x)$ est holomorphe dans tout le plan sauf à l'intérieur de c où elle admet les mêmes points singuliers que $f(x)$. Elle est *continue* à l'intérieur de c puisqu'elle est la différence entre deux fonctions continues à l'intérieur de c. Elle est donc continue dans tout le plan (nulle à l'infini). Elle remplit donc bien les conditions que nous nous étions imposées.

Considérons donc la fonction $w = F(z)$. En un point z_0 extérieur à l'ensemble E des points singuliers et qui n'annule pas la dérivée $F'(z)$, la fonction F prend une valeur w_0 et l'on peut trouver une aire entourant ce point w_0 et suffisamment petite pour que, w étant un point de cette aire, $w - w_0$ soit développable en série procédant suivant les puissances de $z - z_0$. Autrement dit, la branche de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ qui au point w_0 prend la valeur z_0 est holomorphe en ce point. Prolongeons analytiquement cette branche de toutes les façons possibles dans le plan w; nous définirons ainsi toute la fonction $z = \varphi(w)$ qui est en général une fonction à une infinité de branches. Je remarquerai d'abord que le domaine d'existence de cette fonction est *borné*. En effet, la fonction $w = F(z)$ est bornée; donc, quel que soit le point z, le point w correspondant est intérieur à un certain cercle de rayon R ayant pour centre l'origine. Il sera donc impossible qu'en effectuant le prolongement analytique de la fonction z nous puissions sortir de ce cercle.

4. Je démontrerai au sujet de la fonction $z(w)$ le théorème suivant qui joue dans la suite un rôle capital :

Théorème B. — *La fonction $z(w)$ ne peut présenter aucun point d'indétermination.*

Autrement dit, ses seuls points singuliers sont, outre les points algébriques, des points *transcendants ordinaires* (¹).

(¹) Les points critiques algébriques s'obtiendront en éliminant z entre les deux équations $F(z) - w = 0$ et $F'(z) = 0$.

Prolongeons une branche z de la fonction φ le long d'un chemin continu quelconque λ, jusqu'en un point a, singulier pour la branche que nous suivons. Entourons ce point a d'un cercle c de rayon très petit et prolongeons la branche z dans ce cercle de toutes les façons possibles à partir de l'arc $w_0 a$ de λ intérieur à c. Sur l'arc $w_0 a$ et dans le cercle c, la fonction z prend un ensemble E de valeurs. Je dis que le dérivé E' de E est continu. La chose peut être considérée comme évidente. Pour la démontrer en toute rigueur, nous remarquerons que E' contient son dérivé [1]. Il est de même très facile de voir que E' contient E, car tout point de E obtenu pour une valeur w_1 de la variable, est limite des points de E obtenus pour les valeurs voisines, donc tout point de E appartient à E'. Je dis que E' est bien enchaîné. Il suffit de montrer que E l'est. Donnons-nous deux points z_1, z_2 de E obtenus entre autres pour les valeurs w_1, w_2 de w. Sur l'arc $\overline{w_1 w_2}$, extrémités comprises, la fonction z est continue; elle est donc uniformément continue. On pourra donc marquer sur l'arc $\overline{w_1 w_2}$ une succession de points w_i tels que l'oscillation de la fonction z quand on passe de chacun au suivant soit inférieure à ε. Par suite, l'ensemble E' est bien enchaîné et, comme il est parfait, il est continu.

Supposons maintenant que l'origine de l'arc λ se rapproche indéfiniment de a et que le rayon de c tende vers o. Le continu E' obtenu diminue sans cesse. Dans ces conditions, l'ensemble limite de E' est continu. Si donc il ne se réduit pas à un point, il est nécessaire qu'il contienne un ensemble continu de points non singuliers de la fonction $w(z)$. Or, en chacun de ces points, la valeur de la fonction w ne pourrait être que a. La fonction $F(z)$, constante sur une ligne continue, serait donc constante dans tout le plan d'après un théorème de M. Painlevé [2]; l'ensemble limite doit donc se réduire à un point : le *domaine d'indétermination* est un point.

Cette démonstration appelle plusieurs remarques.

Remarque I. — Le chemin λ que nous avons suivi peut être supposé de longueur infinie sans aucune difficulté pour la démonstration.

---

(1) Tout ensemble dérivé est fermé.

(2) PAINLEVÉ, Thèse, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1888. La démonstration de M. Painlevé s'applique à une ligne cantorienne.

La seule condition qu'on lui impose est de tendre vers l'unique point a, c'est-à-dire d'être, à partir d'un certain point, *entièrement intérieur* à un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra entourant a. Cette remarque est indispensable, sans quoi le point a pourrait être point *semi-essentiel* de la fonction $z(w)$ (1).

Remarque II. — Nous n'avons nullement eu besoin de supposer que la fonction $F(z)$ était continue en ses points singuliers. Le théorème précédent subsiste donc quelle que soit la manière dont se comporte F au voisinage de ses points singuliers.

5. Je vais maintenant démontrer un théorème plus complet que le théorème B et qui, comme lui, sera indépendant de toute hypothèse sur la façon dont se comporte $F(z)$ en ses points singuliers.

Quand w tend vers un point a, singulier ou non, z tend vers une valeur limite b. Quand on fait varier le chemin ou la branche de fonction que l'on suit, cette limite b varie. D'une manière générale, considérons un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra entourant le point a du plan des w, et considérons tous les points du plan z qui font prendre à $F(z)$ des valeurs situées dans ce cercle. L'ensemble de ces points z et de leurs points limites est fermé. Quand le rayon du cercle tend vers zéro, cet ensemble diminue sans cesse et tend vers un ensemble limite. Cet ensemble limite est *fermé*. Je dis qu'il n'est pas continu. En effet, dans ce cas il comprendrait un ensemble continu de points réguliers de $F(z)$ donnant à $F(z)$ la valeur a, ce qui est impossible. Cet ensemble est donc la somme d'un ensemble discontinu et d'un ensemble dénombrable. On voit que, si l'on se donne un nombre ε et si l'on trace tous les cercles de rayon ε ayant pour centres les points de cet ensemble limite, on pourra trouver un nombre ρ tel que l'ensemble des points z qui font prendre à $F(z)$ des valeurs w telles que

$$|w-a|<\rho$$

soit entièrement intérieur à ces cercles.

---

(1) *Voir* la note, p. 15.

En définitive nous pourrons, à tout point a du plan w, attacher un nombre ρ tel que, si w tend vers a d'une façon quelconque, z tend vers une limite b et, dès que w est à une distance de a inférieure à ρ, z est à une distance de b inférieure à ε et cela *quel que soit* b, c'est-à-dire en somme quelle que soit la branche suivie.

Ceci posé, le théorème que j'ai en vue est le suivant :

Théorème C. — *Pour l'ensemble de tous les points a du domaine d'existence de $\varphi(w)$ la limite inférieure de tous les nombres ρ répondant à un même nombre ε est différente de zéro.*

En effet, suivant un mode de raisonnement bien classique, on verrait que, si l'on supposait cette limite inférieure nulle, on trouverait un point a qui ferait encore partie, soit comme point intérieur, soit comme point frontière, du domaine d'existence de $\varphi(w)$, et tel que dans tout cercle ayant ce point pour centre la limite inférieure des valeurs de ρ serait nulle. Or, en ce point a le rayon ρ répondant à la valeur $\frac{\varepsilon}{2}$ a une valeur bien déterminée que j'appelle ρ_0 et il est bien certain que pour tous les points intérieurs au cercle de centre a et de rayon $\frac{\rho_0}{2}$ le nombre ρ répondant à la valeur ε a au moins pour valeur $\frac{\rho_0}{2}$. La limite inférieure de ces nombres serait donc au moins $\frac{\rho_0}{2}$.

Si l'on veut, ce théorème établit que la fonction $\varphi(w)$ tend *uniformément* vers une limite en chacun de ses points singuliers.

6. *Exposé de la méthode.* — Voici maintenant en quelques mots la méthode toute naturelle que l'on peut suivre pour démontrer le théorème A. Nous avons déjà vu que le domaine d'existence de la fonction $\varphi(w)$ est borné. Ce domaine est un continuum; il admet donc une frontière formée de lignes continues. Soit L une de ces lignes. Il est bien certain que toute branche z de φ qui peut être poursuivie régulièrement jusqu'en un point a de cette ligne ne peut être prolongée au delà, et tend par suite vers une valeur b qui est l'affixe d'un point de l'ensemble singulier de $F(z)$. Il semble naturel d'admettre que la fonction z a une coupure aboutissant en a. Par

suite, il semble aisé de prolonger analytiquement la fonction z le long d'une ligne λ, variable et tendant vers un arc de la frontière L. A cet ensemble de points λ répondra dans le plan z un ensemble continu et l'on en déduira simplement que l'ensemble limite est continu, et comme il ne peut contenir aucun ensemble continu de points réguliers, sans quoi $F(z)$ serait constante, il doit nécessairement se réduire à un point singulier b de $F(z)$. En ce point b la fonction F ne saurait par suite être continue.

Effectivement c'est bien ainsi que nous allons nous y prendre, mais il importe dès l'abord de signaler, ce que la démonstration fera ressortir davantage, l'insuffisance de ce raisonnement. D'abord, étant donné un point a de L, rien ne prouve qu'il existe un chemin régulier pour une branche ([1]) permettant de la prolonger jusqu'au point a et tendant vers ce seul point a. Par exemple, si l'on considère une fonction uniforme ayant pour coupures les droites $\left(y = \pm \frac{1}{n}, \ 0 \leqq x \leqq 1\right)$ (n entier positif), le segment 0-1 de l'axe des x est une ligne singulière et il n'existe aucun chemin régulier tendant vers un point de ce segment distinct des extrémités.

Une difficulté beaucoup plus grave tient à ce fait qu'un point singulier pour une branche ne l'est pas nécessairement pour les autres. C'est là, au fond, que réside la difficulté essentielle. Si, en suivant une branche, on tombe sur un point singulier et qu'on veuille l'éviter pour pouvoir poursuivre analytiquement la fonction, les singularités changent : à la place d'un point isolé, on trouvera par exemple une coupure ou, au contraire, un point régulier et l'on conçoit sans peine la difficulté qu'il y a à raisonner dans ces conditions.

7. *Définition des points d'arrêt.* — Puisque nous ne savons pas si nous pourrons par un chemin régulier parvenir jusqu'en un point de la frontière L, nous substituerons à ce point un autre point singulier qui aura aussi la propriété d'appartenir à une coupure de la fonction z

([1]) Je dirai couramment qu'un chemin est régulier pour une branche si l'on peut prolonger cette branche tout le long du chemin sans être arrêté par un point singulier.

et que, cette fois, on soit assuré d'atteindre par un prolongement régulier.

Partons d'un point x_0 avec une valeur z_0 de la fonction z, et supposons que cette branche soit holomorphe au point x_0. Prolongeons cette branche à partir de ces conditions initiales, le long d'un chemin quelconque C, issu de x_0, et s'éloignant à l'infini, une droite par exemple. Ce prolongement sera possible jusqu'en un point x_1, mais pas au delà. Alors deux cas pourront se présenter : ou bien, quelque petit que l'on trace un cercle de centre x_1, on pourra trouver un chemin intérieur à ce cercle, joignant deux points de C, l'un situé sur l'arc $x_0 x_1$ et l'autre au delà, et sur lequel on pourra effectuer le prolongement analytique régulier de la branche z_0; nous dirons alors que le point x_1 est un point singulier *ordinaire*. Ou bien au contraire, quelque petit que soit le rayon d'un cercle de centre x_1, le choix d'un tel chemin sera impossible; nous dirons que x_1 est un *point d'arrêt* de la fonction et nous n'irons pas plus loin.

Dans le premier cas, au contraire, après avoir évité le point x_1, par un chemin arbitraire très voisin de x_1 ([1]), et être ainsi parvenus sur C au delà de x_1, nous continuerons à prolonger analytiquement la branche choisie de z sur C jusqu'au point singulier le plus voisin x_2. Nous nous arrêterons en x_2 si ce point est un point d'arrêt; nous continuerons notre route si c'est un point ordinaire.

Je dis qu'en continuant ainsi nous arriverons finalement à un point d'arrêt. Supposons en effet que nous trouvions toujours des points ordinaires. Comme nous ne pouvons certainement pas prolonger analytiquement z jusqu'à l'infini, les affixes de ces points ordinaires auront un point limite x situé sur L et le raisonnement met en évidence une ligne analytique tendant vers x et tout le long de laquelle on pourra prolonger z. Le point x se trouvera alors être pour cette ligne un point d'arrêt ou un point ordinaire. Dans le premier cas nous nous arrêterons. Dans le second nous parviendrons par prolongement analytique régulier au delà de x sur C. Donc, ou bien nous aurons finalement un point d'arrêt et une ligne régulière y aboutissant, ou bien

([1]) Ce chemin peut d'ailleurs toujours être supposé analytique et pourvu d'une tangente.

nous dépasserons *tout* point limite de points ordinaires. La première hypothèse doit donc nécessairement finir par se présenter.

8. *Démonstration de l'existence d'une coupure.* — Nous avons donc établi l'existence d'une ligne C le long de laquelle le prolongement de la branche choisie est possible depuis le point x_0 jusqu'en un point x_1 qui est un *point d'arrêt* pour cette branche. Si je démontre que l'existence d'un tel point x_1 entraîne l'existence d'une coupure, il sera aisé d'achever la démonstration. Mais c'est justement dans cette première partie que se trouve le point le plus délicat et on le comprendra sans peine si l'on remarque que pour une fonction multiforme à une infinité de branches la définition même du mot *coupure* est assez délicate à préciser. On verra avec quelle minutie nous serons obligés de raisonner pour mettre en évidence une ligne qui réponde à l'idée que l'on se fait d'une *coupure*.

Traçons, de x_1 comme centre, un cercle de rayon assez petit pour que la branche z prolongée dans ce cercle de toutes les façons possibles, à partir de l'arc c de C intérieur à ce cercle, ne puisse certainement pas nous faire parvenir aux points de c situés au delà de x_1 ou du moins nous y fasse parvenir avec des valeurs non prolongeables au delà. (En d'autres termes, nous n'excluons pas le cas où c serait lui-même coupure.) Un tel cercle existe évidemment d'après la définition du point d'arrêt : j'appellerai x_0 et a les points où il coupe la courbe C.

Donnons-nous alors d'une façon absolument définitive mais complètement arbitraire une famille continue de courbes γ dépendant d'un paramètre α, passant toutes par les points x_0, a, intérieures au cercle précédent, coïncidant avec c pour la valeur o du paramètre et avec une courbe fixe Γ pour la valeur α_0 du paramètre. Les coordonnées d'un point de chacune de ces courbes seront des fonctions continues d'un paramètre t et du paramètre α; chacune des courbes γ répond à une valeur du paramètre α. Pour fixer les idées, quand c est une droite, on prendra pour courbes γ les cercles d'un faisceau. Ce qui importe, c'est que ce choix une fois fait ne sera plus modifié dans la suite.

Donnons-nous alors un nombre ε; d'après le théorème C, il lui cor-

respond un nombre 2ρ tel que la condition $|w - w_0| < 2\rho$ entraîne, quel que soit w_0, $|z - z_0| < \varepsilon$, z_0 désignant tous les points pour lesquels $F(z) = w_0$ (¹). Quand ε, à la fin du raisonnement, tendra vers o il en sera de même de ρ. Mais pour l'instant il nous suffit de pouvoir assigner la valeur de ρ.

Nous allons alors prolonger z le long des courbes γ. Comme on ne pourra certainement pas parvenir au point a, chacune de ces courbes mettra un point singulier en évidence. Nous tâcherons de choisir parmi ces points un ensemble continu de points qui seront, en quelque sorte, singuliers *pour une même branche*. D'une façon précise nous mettrons en évidence une ligne continue *régulière* pour une branche z et dont tout point soit à une distance inférieure à ρ d'un ensemble continu de points singuliers. De plus, pour que cette ligne ne tende pas vers un point unique quand ρ tendra vers o, nous ferons en sorte qu'elle joigne toujours un point de C à un point de Γ.

Traçons le cercle c_1 de centre w_1 et de rayon ρ. Étudions, au début du mouvement de la courbe γ, la branche z de φ prolongée sur γ. Nous ferons deux parts dans cette étude : la part qui concerne les points w extérieurs à c_1 et celle qui concerne les points w intérieurs à ρ.

Disons d'une manière générale que nous nous réservons le droit de *déformer* chaque courbe γ, mais cette déformation devra toujours être faite de telle manière que la nouvelle courbe γ' parte encore de w_0 et arrive en a, et qu'on puisse y prolonger z du point w_0 jusqu'en un point w, *qui devra appartenir à l'ancienne courbe* γ.

La branche z est régulière de w_0 à p_1, *extrémités comprises*. On peut donc entourer ce segment d'une aire dans laquelle z soit holomorphe. Donc, au début du mouvement des γ, la portion de ces lignes extérieure à c_1, portion que j'appellerai γ_e, est une ligne régulière pour la branche z. Alors, ou bien nous ne rencontrerons aucune difficulté jusques et y compris la dernière courbe γ que rencontre encore c_1, ou, au contraire, l'holomorphie de z cessera avant d'arriver à cette position de γ. Étudions cette dernière circonstance et précisons-la.

(¹) Cette manière de nous exprimer convient à l'hypothèse faite que $F(z)$ est partout continue. Elle serait incorrecte si l'on ne faisait pas cette hypothèse.

Il arrivera que, quand γ tendra vers une position limite γ_1, la branche z qui était toujours prolongeable le long de γ, jusqu'au cercle c, tout au moins, ne sera plus prolongeable le long de γ_1 que sur l'arc $x_0 b$ et pas au delà; deux cas peuvent se présenter suivant que le point b est ou non point d'arrêt de z pour la ligne γ_1. Dans le premier cas, on ne pourra pas, par prolongement analytique, atteindre tous les points de γ_1 situés au delà de b, sans sortir d'un cercle ω de centre b et de rayon assez petit. Mais les courbes γ qui tendent vers γ_1 et le long duquel, nous le savons, le prolongement est possible jusqu'au cercle c_1, nous fournissent des *arcs* de courbe réguliers pour la branche z et tendant vers un certain arc de γ_1. Les points z correspondants forment un continu linéaire dont l'ensemble limite ne peut contenir aucun point régulier, car pour un tel point $F(z)$ prendrait une valeur, affixe d'un point de γ_1 situé dans le cercle ω et par suite le point b ne serait pas un point d'arrêt de z sur la courbe γ_1. Donc cet ensemble limite se réduit au seul point β, valeur limite de z quand x tend vers b sur γ_1 (limite que nous savons exister) et par suite en ce point β, $F(z)$ ne serait pas continue.

Si, au contraire, b n'est pas point d'arrêt, on pourra déformer γ_1 aussi peu qu'on voudra d'ailleurs, de façon à éviter le point b et à revenir sur γ_1 avec une valeur holomorphe de z (¹): c'est bien dans ces conditions qu'on a le droit de faire des déformations de lignes γ : le début et la fin de la ligne ne sont pas altérés.

Donc nous pouvons toujours parvenir à la ligne γ extrême que rencontre c_1 ou du moins nous parviendrons à une ligne γ' commençant en x_0 et finissant sur c_1 au même point que la ligne précitée; de plus le prolongement de z sera possible de x_0 jusqu'au cercle c_1.

A vrai dire, il y a encore un cas que nous devons examiner : J'ai supposé que le point singulier b n'était pas sur le cercle c_1. Supposons qu'il y soit. S'il n'est pas point d'arrêt, en diminuant aussi peu qu'on voudra le rayon du cercle c_1 on pourra tourner encore le point b et les conclusions subsistent. Si b est point d'arrêt, on tracera de ce point comme centre un cercle de rayon suffisamment petit, assez petit en

(¹) Et la déformation peut même être faite de telle manière qu'on parvienne sur γ_1 avec la même valeur z que l'on obtient en faisant tendre les γ vers γ_1.

particulier, ce qui est visiblement toujours possible, pour que le point où ce cercle coupe γ' soit un point d'une courbe primitive γ. On fera alors dans le raisonnement jouer au continuum formé de ce cercle et du cercle c_1 le même rôle que dans le raisonnement primitif au cercle c_1 lui-même.

Occupons-nous maintenant du mouvement de la portion γ_i de γ allant depuis le point de rencontre avec c_1 jusqu'au point a.

Quand γ est assez voisin de C on peut être assuré que sur la courbe γ il y aura *dans* c_1 un point d'arrêt. En effet, évitons les points *ordinaires* que nous pourrons rencontrer sur les courbes γ, et cela d'une façon absolument arbitraire, sans sortir toutefois de c_1. Si alors nous pouvons, quelque voisin que soit γ de C, sortir du cercle c_1 sans rencontrer de point d'arrêt, nous mettrons en évidence un arc de courbe tendant vers C (¹) sur lequel une branche z admet un prolongement régulier et l'arc qui lui correspond dans le plan des z ne peut avoir aucun point régulier comme point limite, car sans cela w_1 ne serait pas point d'arrêt de z sur C. L'ensemble limite de ces arcs du plan des z est donc réduit à *un* point singulier pour lequel F ne serait pas continue.

Dans la suite nous ne répéterons pas ce raisonnement. Quand sur une ligne nous aurons un point d'arrêt pour une branche nous conclurons que sur les lignes voisines il y a aussi des points d'arrêt tendant vers le premier.

Mais, quand la ligne γ s'éloignera suffisamment de C, elle pourra ne plus rencontrer de point d'arrêt *dans* c_1 tout au moins. En effet, un point limite de points d'arrêt peut ne pas être point d'arrêt lui-même. Par exemple, pour une fonction uniforme, une extrémité de coupure n'est pas, au sens où nous l'entendons, un point d'arrêt (²). Dans ce cas, si nous continuions à nous déplacer sur γ, nous finirions certainement, en tournant les points ordinaires, par tomber sur un point d'arrêt, dussions-nous aller jusqu'au point a. Sur chaque ligne γ, nous

---

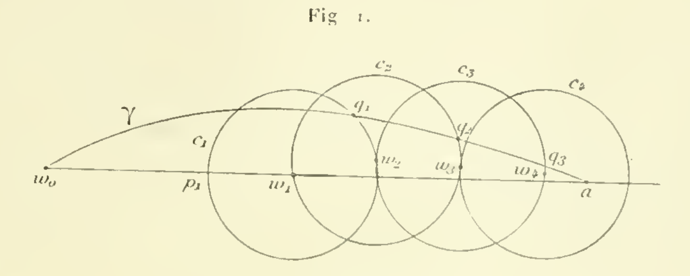
(¹) En supposant que les chemins au moyen desquels on contourne les points ordinaires tendent vers o quand γ tend vers c.

(²) Au moins si le chemin que l'on veut suivre n'est pas confondu avec la coupure.

mettrions donc en évidence un point singulier. Mais si l'on procède ainsi il semble très malaisé de conclure. Voici donc comment nous nous y prendrons :

Soit γ ce premier chemin qui nous permet de parvenir sans rencontrer de point d'arrêt jusqu'au cercle c_1 au point q_1. Déplaçons-nous sur le contour du cercle c_1, dans le sens de rotation des lignes γ autour de a. Si nous rencontrons des points ordinaires, évitons-les ; nous arriverons ainsi certainement à un point d'arrêt pour la ligne c_1, car sans cela nous pourrions parvenir jusque sur C. Soit w_2 ce point d'arrêt. Traçons un cercle c_2 de centre w_2 et de rayon ρ. Ce cercle c_2 va jouer

Fig. 1.



le même rôle que c_1. Pour cela, si le point q_1 est extérieur à ce cercle c_2, nous déformerons la ligne $q_1 w_2$ dans le sens contraire au sens précédemment défini, sens que j'appellerai *direct*. Nous déformons donc $q_1 w_2$ dans le sens inverse jusqu'à l'appliquer sur le prolongement $q_1 a$ de γ. Cette déformation se fait d'une manière analogue à tout à l'heure : en dehors du cercle c_2 on ne tient pas compte des points ordinaires qu'on évite au moyen d'un crochet ([1]). Dans c_2, tant que le chemin variable est suffisamment voisin de $q_1 w_2$, il rencontre un point d'arrêt dans le cercle c_2. Quand il s'écartera suffisamment de $q_1 w_2$ il faudra aller jusqu'au bord du cercle c_2 en un point q_2 ; on suivra alors le contour de ce cercle c_2, en marchant dans le sens direct.

Dans le cas de la figure, on est assuré de rencontrer sur ce cercle un point d'arrêt w_3, car le cercle c_2 coupe C ; mais plus généralement,

---

([1]) On peut aussi procéder un peu différemment : laisser fixe la portion de $q_1 w_2$ extérieure à c_2 et déformer seulement la portion $q' w_2$ intérieure à c_2.

si l'on ne rencontrait pas de point d'arrêt avant d'arriver au point de rencontre des cercles c_1 et c_2, on abandonnerait le cercle c_2 pour se déplacer toujours dans le même sens sur le cercle c_1 et ainsi de suite : sur ce cercle nous rencontrerons à nouveau un point d'arrêt w_3 ; on tracera le cercle c_3 de rayon ρ et de centre w_3 et l'on déformera dans le sens inverse l'arc $q_2 w_3$, toujours d'après le même procédé. Au cours de ces opérations on parviendra nécessairement à un cercle c_n renfermant le point a, car tous ces cercles sont de rayon ρ. A partir de ce moment, la déformation continue de l'arc $q_{n-1} w_n$ ne pourra plus nous faire sortir de ce cercle c_n ou, du moins, on arrivera certainement avant à faire occuper à cet arc dans sa déformation la position γ. De sorte que, finalement, nous nous trouverons avoir effectué le prolongement de la branche z le long d'une ligne γ' commençant en w_0, coïncidant en général avec γ sur une certaine longueur, et arrivant finalement en un point d'arrêt sur la ligne γ. Mais, dans l'intervalle, γ' et γ sont en général distinctes, car γ' comprend des portions passant par les points $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$.

Nous serons donc parvenus jusqu'à la ligne γ. Il est alors relativement facile de montrer comment nous pourrons de même parvenir jusqu'à la ligne Γ que nous avons assignée à l'avance.

Il y a plusieurs hypothèses à faire : si, comme nous venons de le supposer, il y avait avant la ligne γ extrême qui rencontre c_1 une ligne qui n'ait aucun point d'arrêt dans c_1, nous avons vu quelle modification on apporte à la suite du chemin et cette modification nous permet d'arriver en fin de compte en un point d'arrêt, situé sur la ligne primitive. Dans ce cas nous recommencerons en faisant jouer le rôle de C et de w_1 respectivement à la ligne γ' que nous venons de construire et au point d'arrêt w_n que nous venons de mettre en évidence sur elle (1); j'appellerai c_n le cercle de centre w_n et de rayon ρ.

Si au contraire nous avons pu, sans cesser de rencontrer des points d'arrêt *dans* c_1, parvenir à la ligne extrême γ qui rencontre c_1, ou bien cette ligne elle-même aura un point d'arrêt dans c_1 et par suite sur le contour même de c_1, ou bien on lui appliquera le raisonnement précé-

(1) w_n n'est plus tout à fait le même que dans le raisonnement précédent; c'est le dernier point d'arrêt que je mettrai en évidence sur γ même.

dent et on lui substituera une ligne γ' sur laquelle on raisonnera ensuite. Dans le premier cas, et j'y ramènerai aussi celui dont j'ai dit un mot précédemment où la portion de γ extérieure à c_1 ([1]) rencontrait un point d'arrêt *sur* c_1 même, dans ces deux cas, dis-je, je considérerai le point d'arrêt w_2 mis ainsi en évidence sur c_1; je tracerai le cercle c_2 de centre w_2 et de rayon ρ et l'ensemble des deux cercles c_1 et c_2 sera considéré dans la suite du raisonnement comme formant un seul continuum dont le contour extérieur jouera le même rôle que la périphérie de c_1 dans le raisonnement ci-dessus exposé. Alors ou bien on parviendra à l'extrême ligne γ rencontrant $(c_1 + c_2)$ et l'on pourra continuer ainsi jusqu'à la ligne Γ, ou bien une ligne γ cessera de rencontrer un point d'arrêt dans l'aire $(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$; on la poursuivra jusqu'au contour de $(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$ en un point q_1 et ainsi de suite. Dans les opérations suivantes on pourra avoir encore l'occasion de faire jouer à une succession de cercles le rôle que jouaient les cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ du raisonnement type. Mais, d'après la disposition de tous ces cercles, il est incontestable que le point capital du raisonnement, savoir que l'un des cercles (ou l'une des files de cercles) finit par contenir a, demeurera toujours exact.

Alors il n'est pas douteux qu'on parviendra finalement à une courbe Γ' ayant même origine w_0 et même extrémité a que Γ et le long de laquelle la branche z sera prolongeable à partir du point w_0 jusqu'en un point situé *sur la courbe* Γ elle-même et qui sera point d'arrêt.

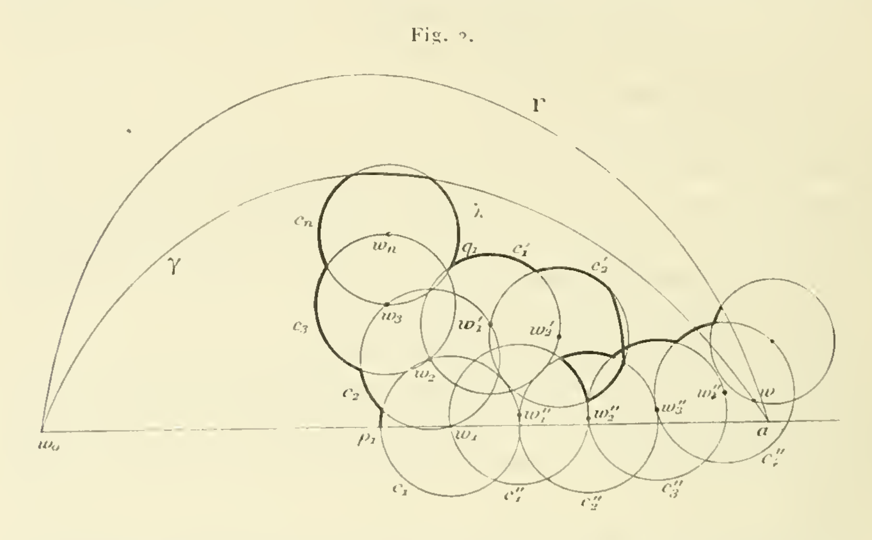
Nous allons maintenant tâcher de construire une ligne λ allant de C à Γ, rencontrant toutes les courbes γ' précédemment envisagées, et dont tout point soit à une distance inférieure à 2ρ, par exemple, d'un point singulier (et même d'un point d'arrêt). A vrai dire il n'est pas certain qu'une telle ligne existe. Essayons de la former en prolongeant z le long de portions des cercles c_i à partir du point p_1 sur le cercle c_1. Si l'on est dans le cas où les lignes γ rencontrant c_1 ont des points d'arrêt dans c_1 on ira jusqu'à la rencontre avec le cercle c_2 et ainsi de suite : on se déplacera sur c_2 puis sur c_3. Si la première file de cercles arrive à la courbe Γ, la ligne ainsi formée d'arcs de cercles

---

([1]) Plus exactement *antérieure* à c_1.

jouit bien de la propriété voulue : chacun de ces points est à une distance inférieure à 2ρ d'un point d'arrêt de la branche qu'on poursuit. Mais supposons que dans le $n^{\text{ième}}$ cercle c_n on ait une courbe γ (ou plutôt γ') sans point d'arrêt *dans* c_n. Alors on prendra pour λ d'abord des arcs de cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jusqu'à la première ligne γ' qui permette de sortir de c_n, puis un arc de cette ligne γ', puis des arcs de cercles $c_n, c_{n-1}, \ldots$ parcourus dans le sens inverse jusqu'au cercle c'_1 ayant pour centre le premier point d'arrêt que l'on rencontre ainsi; puis des arcs de $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$, parcourus dans le sens direct jusqu'à ce que, en déformant la ligne c'_1, ω'_1 de façon à remonter vers γ, on arrive

Fig. 2.



à la première ligne γ_1 qui ne rencontre plus de point d'arrêt dans c'_n. On suivra alors cette ligne γ_1 jusqu'au second point de rencontre avec c'_n, puis on décrira dans le sens inverse les arcs $c'_n, c'_{n-1}, \ldots$ jusqu'à rencontrer un point d'arrêt. Il pourra même arriver que l'on parvienne ainsi jusqu'à c'_1 et ensuite qu'on soit obligé de décrire, toujours dans le même sens inverse, une portion du contour de la première file de cercles. Mais alors on sera assuré de rencontrer un point d'arrêt et l'on ira pour former λ jusqu'au cercle c''_1 ayant pour centre le point d'arrêt ω''_1 mis en évidence; on se déplacera sur c''_1 et ainsi de suite.

Il résulte alors de ce qui précède que cette ligne λ ne renfermera

aucun point singulier de la branche z qu'on y poursuit et que par suite on pourra y prolonger z jusqu'à la courbe Γ.

Mais cette ligne λ jouit-elle de la propriété que dans un cercle de rayon 2ρ il y ait un point singulier de la branche z quel que soit le centre de ce cercle sur λ. *A priori*, cela semble exact, puisque tous les points de λ sont sur des cercles c_n. Prenons par exemple un point ω de λ sur la première file de cercles, mais dans la deuxième partie du déplacement, quand on redescend la file c_n, c_{n-1}, ... Supposons que ce point soit sur c_{n-1}. Si alors le point z se déplace d'une façon quelconque *dans les deux cercles* c_n, c_{n-1}, il est bien évident que ce déplacement pourra être choisi de telle sorte que l'on rencontre un point d'arrêt. On n'aurait par exemple qu'à décrire λ en sens inverse jusqu'à c_{n-1}, puis à suivre une des courbes γ dans c_{n-1}. Mais, si l'on s'astreint à rester dans un cercle de centre ω et de rayon 2ρ, on ne pourra pas toujours se déplacer dans *tout* le cercle c_n; et alors il n'est plus évident, il n'est même plus exact en général que les points d'arrêt des courbes γ qu'on avait précédemment rencontrés dans c_{n-1} restent singuliers si on les aborde d'un autre côté. Il peut se faire qu'en se déplaçant régulièrement à partir du premier arc de c_{n-1} *tous les points* du cercle soient singuliers, et qu'en se déplaçant dans le même cercle à partir du second arc, la branche z soit holomorphe dans tout le cercle. Ce sont là des singularités inhérentes à la notion de fonction analytique et que l'on ne peut pas écarter *a priori*.

Mais ce que nous pourrons affirmer, c'est que *dans les portions montantes* de λ, j'entends par là quand on décrira les arcs de cercle c_n dans le sens direct, ou encore dans l'ordre des indices croissants, on sera toujours à une distance inférieure à 2ρ d'un point d'arrêt. Il en sera de même pour les portions de λ formées d'arcs des courbes γ ainsi que les portions des *premiers* cercles c_n qu'on décrit en sens inverse, c'est-à-dire celles qui suivent immédiatement, sur λ, les arcs de courbe γ.

Désignons par λ_ε la courbe λ et par λ'_ε, λ''_ε l'ensemble des portions montantes et des portions descendantes de λ, en joignant à λ'_ε les arcs de λ que nous venons de signaler et qui sont certainement à une distance inférieure à 2ρ d'un point d'arrêt.

A λ_ε correspond dans le plan z une ligne μ_ε formée elle aussi de portions μ'_ε, μ''_ε correspondant respectivement à λ'_ε et à λ''_ε. Supposons

que ρ, et par suite ε, tendent vers zéro ; λ_ε tend vers une ligne continue l non réduite à un point. En effet, d'abord on est dans le cas où la limite est un continu, car le point w_1 est certainement point limite, et, d'autre part, il y a des points limites sur Γ ; l'ensemble limite est formé de lignes joignant w_1 à Γ : de même μ_ε tend vers une limite m car l'ensemble limite comprend le point $z = z_1$, vers lequel tend z quand p_1 tend vers w_1. Si m était réduit à un point le théorème serait démontré. Mais la ligne m pouvant comprendre *a priori* des portions régulières, on ne peut pas en conclure immédiatement que m est réduit à un point. Désignons par l' et l'' les ensembles limites de λ'_ε et λ''_ε respectivement. Si je montre que l' comprend des portions continues, cela suffira évidemment pour qu'on puisse répéter le raisonnement déjà fait.

Sur un arc quelconque de l, l' et l'' sont formés de portions qui alternent évidemment. Si donc nous supposons que, sur cette portion, l' est constitué uniquement par des points, il en résultera que l'' comprend *tout* l'arc de l, sauf un ensemble au plus discontinu de points. Mais les λ''_ε redescendent toujours la succession des courbes γ. Il en est donc de même des ensembles limites. D'autre part, les λ'_ε ont des points sur *chacune* des courbes γ. Donc leur ensemble limite doit avoir aussi des points sur chacune des courbes γ. Il y a évidemment contradiction entre ces deux faits. Donc, sur tout arc de l, il y a un ensemble continu de points limites de λ''_ε.

Pour être tout à fait précis, il convient d'ajouter que pour chaque valeur de ε on peut choisir une des portions continues de λ'_ε de façon que la limite des portions choisies soit continue quand ε tend vers zéro. Donnons en effet à ε une infinité dénombrable de valeurs tendant vers zéro, $\varepsilon = \frac{1}{n}$ par exemple. Pour chaque ε il y a un nombre fini de portions continues dans λ'_ε. L'ensemble de toutes ces portions est donc dénombrable. On peut les combiner entre elles d'une infinité dénombrable de manières. Si chacune de ces combinaisons donnait seulement un point limite, l'ensemble limite serait dénombrable ([1]). Donc une des combinaisons donne un *continu* limite. Et alors le raisonnement

([1]) Tout point de l'ensemble limite est limite d'une des combinaisons.

s'achève sans aucune difficulté. A chacune des portions répond dans le plan z un continu, dont l'ensemble limite est formé uniquement de points singuliers. Cet ensemble est donc réduit à un point. Pour ce point, la fonction F doit être discontinue.

Le théorème A est donc démontré.

9. *Les fonctions multiformes.* — Ce théorème ne nous renseigne pas d'une façon définitive sur la façon dont la fonction se comporte au voisinage d'un point singulier donné. Il ne permet même pas d'affirmer que la fonction est discontinue en *tous* ses points singuliers. Avant d'indiquer ce qui reste encore à démontrer, et la manière dont on pourra s'y prendre pour une telle démonstration, je crois utile de faire une courte digression sur les fonctions analytiques.

L'ensemble des points singuliers d'une fonction uniforme ou à un nombre fini de branches est *fermé*. Quand la fonction a une infinité de branches il n'en est plus de même. De plus le dérivé de l'ensemble singulier peut comprendre tout le plan. Ce qui est d'apparence plus paradoxale encore c'est que, *a priori* du moins, une fonction multiforme peut admettre pour points singuliers tous les points d'une aire et être définie dans cette aire. A vrai dire je ne connais aucun exemple de ce dernier genre de singularités et l'on peut espérer qu'il ne se présente jamais. Mais on ne doit pas l'écarter *a priori*.

D'une manière tout analogue, on voit que l'existence d'un ensemble continu de points singuliers, pour une fonction qui a une infinité de branches, n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une coupure, du moins suivant que l'on adopte telle ou telle définition du mot *coupure*.

De ce qui précède, il semble résulter que la définition de ce mot doit s'entendre de la façon suivante : Je dirai qu'une ligne L est coupure d'une fonction analytique s'il existe une ligne λ tendant vers L le long de laquelle le prolongement analytique d'une branche au moins de la fonction sera toujours possible et si à toute position de λ correspond un nombre ε tendant vers zéro quand λ tend vers L, tel que tout cercle de rayon ε ayant son centre sur λ renferme un point singulier de la branche que l'on considère supposée prolongée dans ce cercle sans en sortir à partir du centre.

On voit alors sans peine que le théorème A renferme en particulier la démonstration du théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction analytique dont le domaine d'existence est borné admet nécessairement des coupures.*

Il n'est pas même nécessaire que le domaine d'existence soit borné. Il suffit que la fonction admette des points d'arrêt pour une ligne. Appelons *point-coupure* d'une fonction, un point a tel que, si une branche f admet le point a pour point singulier, quelque petit que soit un cercle de centre a, le prolongement de la branche f dans ce cercle ne permette pas d'atteindre tous les points du cercle. Alors il y a un *continu superficiel* de points qu'on ne peut pas atteindre dans chacun de ces cercles. Si l'on prend une ligne l passant par a, sur laquelle on puisse prolonger f jusqu'au point a, et qui se continue par une ligne située dans l'aire non atteinte, le point a sera point d'arrêt pour cette ligne.

Donc :

Théorème. — *Toute fonction qui admet un point-coupure admet une coupure dans tout cercle ayant ce point pour centre.*

La réciproque est-elle vraie? Je me borne à poser cette question en remarquant cependant que la présence d'une coupure pour une fonction, en adoptant pour ce mot la définition précédente, entraîne l'existence d'un ensemble de points singuliers ayant pour dérivé la ligne coupure L, mais il n'est même pas certain, quoique cela soit vraisemblable, que les points de L soient singuliers. Une question du même genre est la suivante : La présence d'un ensemble continu de points singuliers entraîne-t-elle l'existence d'une coupure? Cette question paraît liée intimement au théorème de MM. Volterra et Poincaré déjà cité.

10. Je n'insiste pas sur les questions que soulève l'étude de ces singularités et je reviens aux fonctions uniformes qui ont un ensemble discontinu de points singuliers. Nous avons montré en somme, dans ce cas, que la fonction inverse a une coupure le long de laquelle,

dirai-je d'une façon incorrecte mais facile à saisir d'après ce qui précède, elle prend une valeur constante. Dans le cas des fonctions uniformes, au moins dans un grand nombre de cas, on peut affirmer qu'une fonction qui prend la même valeur le long d'un arc de coupure se réduit à une constante. La question est beaucoup plus délicate à étudier si la fonction a une infinité de branches. Dans la troisième partie j'en aborderai un cas particulier. Mais, en général, la fonction, au voisinage de la coupure, peut se permuter avec d'autres branches qui, elles, ne tendent pas vers la valeur constante donnée, et c'est là ce qui constitue la difficulté de l'étude de ce cas.

Si l'on démontrait ce théorème d'une façon tout à fait générale, on en déduirait qu'il est impossible que la fonction inverse d'une fonction uniforme sans coupures soit elle-même pourvue de coupures. On montrerait alors sans peine que le domaine d'indétermination en tout point singulier appartenant à un ensemble discontinu comprend tout le plan, et même, en nous bornant alors au cas d'une fonction absolument dépourvue de coupures, que l'ensemble des *valeurs exceptionnelles* (1) ne comprend aucun continu, linéaire ou superficiel. Dans cette vaste question, nous ne connaissons pour l'instant que deux faits : d'une part, impossibilité de la continuité complète d'après le théorème A ; d'autre part, possibilité d'un nombre *fini quelconque* de valeurs exceptionnelles d'après les travaux de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes.

11. Je reviens maintenant au théorème B démontré plus haut et qui nous a été si utile. La démonstration de ce théorème, telle que je l'ai présentée, suppose que la fonction $w = F(z)$ est uniforme. Mais je veux remarquer qu'elle subsiste entièrement si le nombre des branches de w est fini (2). D'autre part, le théorème A subsiste lui

---

(1) J'appelle ainsi les valeurs que la fonction ne prend pas quand la variable décrit tout le plan.

(2) Au contraire, si le nombre des branches de $w(z)$ est infini, on ne peut pas affirmer qu'en un point de l'ensemble limite w *prend* la valeur a (*voir* p. 17) mais simplement que ce point est limite de points z_1 tels que l'équation $z(w) = z_1$ a une infinité de racines tendant vers a.

aussi comme on le voit aisément, si l'on suppose que x a un nombre fini de branches. Donc la fonction inverse d'une fonction à un nombre fini de branches n'admet, en outre des points algébriques, que des points transcendants ordinaires. Est-il possible dès lors que la fonction inverse d'une fonction à un nombre fini de branches soit une fonction à un nombre fini de branches? Les seules singularités non algébriques de chacune de deux fonctions seront des points transcendants ordinaires. D'après le théorème A, ils ne pourront appartenir à un ensemble discontinu. D'où le théorème suivant :

Théorème B'. — *Si une fonction et sa fonction inverse ont toutes deux un nombre limité de branches, les seules singularités non algébriques des deux fonctions sont des coupures* (¹).

On en déduit encore que si une fonction $f(z)$ a un nombre fini de branches et des singularités non continues, la fonction inverse ne peut pas avoir un nombre borné de branches. Il ne faudrait pas en conclure qu'elle a une infinité de branches, mais seulement que, quel que soit n, l'équation $f(z) - A = 0$ a *pour une valeur convenable* de A un nombre de racines supérieur à n.

12. Ceci nous amène, pour terminer, à dire un mot des fonctions dont le nombre des branches varie avec la région du plan où l'on se trouve. Supposons que la fonction $y(x)$ ait un nombre *borné* de branches au plus égal à n. Il y a évidemment un point x où ce nombre est égal à n, et en déplaçant un peu, au besoin, ce point x, on peut supposer qu'il n'est singulier pour aucune des n branches $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Toute fonction symétrique de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est uniforme en x et admet tous les points singuliers *non algébriques* des différentes branches y. S'il existe alors un point x' où le nombre des branches est $n - p$ seulement, il n'existera aucun chemin allant de x à x' et régulier pour la fonction symétrique considérée. Donc cette fonction aura une coupure fermée entourant x'. Cette coupure sera aussi une coupure de la fonction $y(x)$ (²). Ce sera une ligne singulière pour p

(¹) Ou des points limites de coupures.

(²) Ce mot a un sens précis puisque y est à n branches.

des branches. Les autres branches seront, en général, régulières sur la même ligne.

Cependant il pourrait arriver que la coupure n'existe pas et se réduise au point x' lui-même. En tout point du plan la fonction aurait n branches, sauf en x' où elle en aurait moins de n. Je citerai l'exemple de la fonction $y(x)$ définie par $ye^y = x$ qui a une infinité de branches sauf pour les points $x = 0$ et $x = \infty$. Cependant cette fonction n'a pas de coupures.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

1. Je voudrais maintenant montrer par des exemples que le théorème A se présente d'une façon naturelle et nécessaire dans bien des questions, même élémentaires, de la théorie des fonctions et qu'il est susceptible d'applications intéressantes.

L'étude générale des fonctions analytiques comprend des problèmes des deux types suivants : 1° Trouver les propriétés d'une fonction ayant des singularités données (étudier la croissance, les développements, les zéros, etc.); 2° Trouver les singularités de fonctions répondant à une définition donnée (par exemple de fonctions vérifiant une équation différentielle ou fonctionnelle, ou admettant un développement donné). On comprend que, dans l'un et l'autre cas, il soit très utile de connaître les propriétés caractéristiques de grandes classes de fonctions. Or, notre théorème A établit justement une telle propriété pour les fonctions uniformes pourvues de coupures; on saura désormais que ce sont les seules qui peuvent rester continues en leurs points singuliers. On pourra donc trancher certaines questions qui restaient douteuses ou compléter certains énoncés; je n'en citerai comme exemple que le théorème B'.

On peut objecter qu'il est bien superflu de s'attacher à l'étude de certaines fonctions à singularités compliquées, car on n'a pas souvent l'occasion d'en rencontrer. L'exemple des fonctions fuchsiennes dont toute une classe a justement un ensemble parfait de points singuliers,

montre qu'une équation fonctionnelle des plus simples introduit de telles fonctions en Analyse ([1]). Les fonctions définies par des équations différentielles même très simples peuvent rentrer dans le même type. D'ailleurs, toutes les fois qu'on veut définir des classes de fonctions par un procédé analytique on est forcé de n'exclure *a priori* aucune hypothèse, si invraisemblable qu'elle puisse être. La théorie analytique des équations différentielles a justifié d'une manière éclatante certaines études modernes de la théorie des fonctions où il pouvait sembler à certains qu'on introduisait à plaisir les complications.

2. Le théorème A intervient justement dans la démonstration d'un certain nombre de propositions de la théorie des équations différentielles. Je citerai par exemple le théorème suivant de M. Painlevé :

Étant donnée une équation différentielle du second ordre algébrique en y'', y', y et x, toute intégrale y uniforme (ou à n branches) dans une aire A, admet dans cette aire des points d'indétermination. Elle n'y admet d'ailleurs pas de coupure ([2]).

J'ajoute d'ailleurs que la démonstration de ce théorème peut se faire sans le secours du théorème A. Au contraire, il se présente d'une façon nécessaire dans la solution de la question qui fait le principal objet de ce Chapitre et qui est une des premières que l'on est amené à se poser dans la théorie analytique des équations du premier ordre. Le théorème A permet de la résoudre assez simplement alors que tous les efforts qui ont été faits pour se passer de ce théorème sont restés vains.

3. *Les équations du premier ordre.* — Avant d'aborder cette application je crois indispensable de préciser certains résultats de la théorie des équations du premier ordre dont les énoncés m'ont été communiqués par M. Painlevé, mais dont les démonstrations sont inédites.

([1]) Elles vérifient aussi une équation très simple du troisième ordre.

([2]) PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 443.

Considérons une équation du premier ordre $F(y', y, x) = 0$ algébrique en y', y et x [1] et considérons l'intégrale unique y définie par des conditions initiales y'_0, y_0, x_0, x_0 étant distinct des points ξ, points critiques fixes de l'intégrale qui peuvent, on le sait, se déterminer algébriquement antérieurement à toute discussion et qui sont en nombre fini. Cette intégrale dépend de x et des conditions initiales x_0, y_0, y'_0. Mais, comme on a $F(y'_0, y_0, x_0) = 0$, on peut dire que l'intégrale est une fonction de x, x_0 et y_0. Ceci posé, on connaît le théorème fondamental suivant :

L'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ est une fonction ALGÉBROÏDE *de x et de y_0 pour $x = x_0$ et cela quel que soit y_0.*

Plus généralement joignons par un chemin l ne passant par aucun point ξ deux points x, x_0 arbitraires distincts eux-mêmes des points ξ. Si l'on poursuit analytiquement sur l [2] l'intégrale y déterminée par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0, on arrive en x avec une valeur coïncidant avec une branche d'une certaine fonction $y = \chi(y_0)$ algébroïde en y_0. Ces théorèmes sont classiques, mais dans leur application il faut procéder avec une extrême prudence. Par exemple, il faudrait bien se garder d'en conclure que l'intégrale considérée comme fonction de la constante est une fonction analytique qui n'admet que des points singuliers algébriques ou encore, dans le cas où un nombre fini de branches de l'intégrale se permutent autour des points critiques mobiles, que l'intégrale dépend algébriquement de la constante.

Il y a, en effet, une importante distinction à faire entre les deux fonctions suivantes. D'une part, laissant x_0 et y_0 fixes, faisons déplacer x d'une façon quelconque dans le plan sans tourner autour des points ξ; la branche d'intégrale $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ se permutera avec un certain nombre d'autres branches d'intégrale $\varphi_1(x, x_0, y_0)$, $\varphi_2(x, x_0, y_0)$, ...

---

(1) Pour le raisonnement il suffit que F soit analytique en x, pourvu que les points critiques fixes ξ de l'intégrale soient en nombre fini.

(2) Il s'agit ici d'un prolongement analytique plus général que celui de Weierstrass. Sur l on pourra rencontrer un point critique *algébrique* de y. Pour ce point x, la branche d'intégrale prend la valeur y. Au delà de x, nous adopterons une quelconque des branches qui, en x, prend la même valeur y.

D'autre part, laissons au contraire x et x_0 fixes et prolongeons dans tout son domaine d'existence par le procédé de Weierstrass la fonction analytique de y_0 : $\varphi(x, x_0, y_0) = \overline{\varphi}(y_0)$, obtenue. Il est bien évident, et cela d'après le théorème de tout à l'heure, que toutes les branches $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, appartiennent à la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$; *mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie :* il peut arriver que la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ ait au point y_0 des valeurs y_1 intégrant bien l'équation différentielle, mais dont aucune détermination ne se réduira à y_0 pour $x = x_0$ quand le point x se déplacera dans le plan d'une façon quelconque sans tourner autour des points ξ.

Avant d'étudier les circonstances dans lesquelles ce fait singulier se produit, je voudrais reproduire les exemples bien simples qu'en a donnés M. Painlevé.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad y' = \frac{y}{x(y+1)},$$

dont l'intégrale générale est

$$(2) \qquad ye^y = \frac{x}{x_0} y_0 e^{y_0}.$$

Les points ξ sont $x = 0$ et $x = \infty$ et il y a un point critique mobile

$$x = -\frac{x_0}{y_0} e^{-1+y_0},$$

autour duquel se permutent une infinité de branches de l'intégrale y. Ces branches épuisent toutes les branches de la fonction $y(y_0)$. Cette fonction a deux points critiques non algébriques mais logarithmiques qui sont $y_0 = 0$ et $y_0 = \infty$.

Considérons maintenant le rapport des périodes $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ d'une différentielle elliptique de première espèce comme fonction du module X et posons $x = \frac{\omega_2}{\omega_1}(X)$. Si nous remplaçons dans (1) et (2) x par cette fonction, nous voyons que l'intégrale $y(X)$ définie par les conditions initiales X_0, y_0 aura ou non un point critique mobile suivant que le

coefficient de i de la quantité complexe $-\frac{\omega_2}{\omega_1}(X_0)\frac{1}{y_0 e^{1+y_0}}$ sera positif ou négatif; si donc y_0 est dans une région D du plan, l'intégrale aura ses points critiques fixes. Dans le reste du plan *deux* branches se permutent autour du point critique mobile. Cependant la fonction $y(y_0)$ a *une infinité* de déterminations : une ou deux d'entre elles seulement sont des intégrales qui, par permutation autour du point mobile, prennent en X_0 la valeur y_0.

Au contraire, remplaçons x par la fonction modulaire $x = \varphi(X)$. L'*intégrale générale* de la nouvelle équation sera *uniforme* si y_0 est dans une région du plan, et à deux branches dans le reste du plan. Et cependant, l'intégrale est une fonction de la constante à une infinité de branches.

Pour examiner dans quelles conditions cette circonstance peut se présenter, considérons une branche $y = \varphi(x, \overline{x_0}, \overline{y_0})$ d'intégrale définie par les conditions initiales $\overline{x_0}$, $\overline{y_0}$, $\overline{y'_0}$. Laissons $\overline{x}$ et $\overline{x_0}$ fixes et faisons déplacer le point y_0. Pour $y_0 = \overline{y_0}$ il y a une branche de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ qui coïncide avec φ. Prolongeons analytiquement cette branche : alors, ou bien, quel que soit le chemin que nous suivrons, il y aura toujours coïncidence entre $\overline{\varphi}(y_0)$ et $\varphi_i(\overline{x}, \overline{x_0}, y_0)$ ou bien il existera un point Y_0 tel que la coïncidence ait lieu jusqu'en ce point, mais plus au delà.

Considérons les points critiques mobiles de l'intégrale

$$y = \varphi(x, \overline{x_0}, y_0).$$

Les affixes de ces points dépendent analytiquement de y_0. Supposons que toutes les branches de cette fonction analytique $a(y_0)$ restent pour $y_0 = Y_0$ bien déterminées et distinctes des points ξ. Ces points tendront vers des points limites qui seront les points autour desquels se permutent les différentes branches d'intégrale définies par les conditions initiales $\overline{x_0}$, Y_0. Or, pour $y_0 = Y_0$ et dans le voisinage de Y_0, ces différentes branches coïncident avec des branches d'une certaine fonction $f(y_0)$, algébroïde pour $y_0 = Y_0$. La branche φ_i étant justement une de ces branches, on voit que la fonction $\varphi(y_0)$ coïncide

avec $f(y_0)$ quelque voisin que soit y_0 de Y_0 et, comme la coïncidence entre φ_i et f subsiste pour y_0 et Y_0, φ_i ne cesse pas de coïncider avec $\bar{\varphi}$ en Y_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Comment est intervenue, dans la démonstration, l'hypothèse que les points critiques mobiles a tendent vers des limites déterminées différentes des points ξ? C'est que, en effet, l'on est alors assuré que les branches qui se permutent autour des points mobiles pour $y_0 = Y_0$ sont toutes les limites des branches qui se permutaient autour des points critiques mobiles pour y_0 assez voisin de Y_0. Sans cela, on ne pourrait affirmer que la coïncidence entre $\varphi_i(x, \overline{x_0}, y_0)$ et $f(y_0)$ a encore lieu en Y_0, car $\varphi_i(x, \overline{x_0}, Y_0)$ pourrait ne pas provenir d'une permutation autour des points critiques mobiles à partir de $\varphi(x, \overline{x_0}, Y_0)$.

On voit donc que la coïncidence entre les branches de l'intégrale φ et la fonction $\bar{\varphi}$ *peut* cesser en Y_0 si le point Y_0 est tel que l'un ou plusieurs des points critiques mobiles tendent vers un point ξ ou deviennent indéterminés.

Il n'en résulte pas que, nécessairement, la coïncidence cesse dès qu'il existe de tels points Y_0. Parmi ces points Y_0 il peut s'en trouver certains tels que, y_0 tendant vers l'un d'eux sur un chemin L, la coïncidence cesse en effet. Distinguons alors deux cas :

1° Ces points Y_1 ne forment pas de ligne. Alors, partant de $\overline{y_0}$ avec une branche quelconque de la fonction $\bar{\varphi}(y_0)$ on pourra revenir au même point y_0 avec toutes les branches de la fonction $\bar{\varphi}$ sans jamais rencontrer de tel point, car, si un chemin rencontre un point Y_1, on pourra le déformer aussi peu qu'on voudra de façon à ne plus rencontrer de point Y_1 et, d'autre part, à ne pas changer de branche. Comme on ne rencontre plus de point Y_1, la coïncidence ne cesse pas d'avoir lieu entre les branches de l'intégrale $y = \varphi(\bar{x}, \overline{x_0}, y_0)$ et de la fonction $\bar{\varphi}(y_0)$. On pourra donc affirmer, dans ce cas, que les branches de l'intégrale épuisent *toutes* les branches de la fonction.

2° Les points Y_1 forment des lignes. Cela exige, en particulier, que les points Y_0 forment eux-mêmes des lignes. Dans ce cas, pour revenir au point $\overline{y_0}$ après en être parti, avec *toutes* les valeurs de $\bar{\varphi}(\overline{y_0})$ il *pourra* être nécessaire de décrire des chemins rencontrant des

points Y_1. Alors il pourra se faire que certaines branches de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$ soient des intégrales dont aucune branche ne prend au point $\overline{x_0}$ la valeur $\overline{y_0}$.

En définitive, la circonstance exceptionnelle signalée ne se présente *jamais* quand les points Y_0 ne forment pas de ligne ; elle *peut* se présenter, sans avoir nécessairement lieu, quand les points Y_0 forment des lignes.

En se reportant à l'exemple étudié plus haut, on voit que dans le premier cas les points Y_0 sont les points zéro et ∞. Quand y_0 tend vers zéro, le point critique mobile tend vers $\xi = \infty$. Quand y_0 tend vers l'infini, ce même point est indéterminé. Dans les deux exemples suivants, les points Y_0 forment des lignes.

Les points Y_0 ne sont pas forcément des points algébriques de la fonction $\overline{\varphi}(y_0)$, mais ils ne peuvent pas être *transcendants essentiels*, puisque les points $\overline{x_0}$ et $\overline{x}$ sont distincts des points ξ et l'on sait que dans ces conditions toutes les intégrales restent déterminées.

4. Je vais maintenant me borner au cas où l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée est une fonction à n branches au plus, permutables autour des points critiques fixes ou mobiles, et je me propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème C. — *Quand l'intégrale générale d'une équation algébrique du premier ordre est une fonction à n branches au plus, elle admet autour des points critiques mobiles un nombre m de branches* ($m \leq n$) *qui est* le même *quelle que soit l'intégrale considérée, sauf exception pour un nombre fini de valeurs de la constante.* De plus, *l'intégrale générale est une fonction algébrique de la constante.*

Je m'appuierai sur une autre proposition inédite de M. Painlevé, qui est la suivante :

Si l'intégrale générale $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ *d'une équation algébrique du premier ordre admet un nombre fini de branches, les points critiques mobiles de l'intégrale ne peuvent être indéterminés pour aucune valeur de la constante* y_0.

Considérons les points Y_0 pour lesquels les points critiques mobiles tendent vers des points ξ ou sont indéterminés. Il faut démontrer que la seconde hypothèse ne peut se présenter.

Supposons que le point y_0 tende vers Y_0 d'une façon quelconque. Il arrive alors que deux branches

$$y = \varphi_1(x, \overline{x_0}, y_0) \qquad \text{et} \qquad y = \varphi_2(x, \overline{x_0}, y_0),$$

permutables entre elles, en général, autour des points critiques mobiles, cessent de se permuter si y_0 prend la valeur Y_0. Posons

$$z_1(x) = \varphi_1(x, x_0, Y_0) \qquad \text{et} \qquad z_2(x) = \varphi_2(x, \overline{x_0}, Y_0).$$

Les deux fonctions $z_1(x)$ et $z_2(x)$ ne se permuteront plus autour des points critiques mobiles, ni d'ailleurs, en général, autour des points critiques fixes : ce sont deux fonctions analytiques distinctes.

Quand y_0 est voisin de Y_0 sans se confondre avec Y_0, il existe un point du plan des x, soit $a(y_0)$, tel que, x tournant autour de a, on passe de $\varphi_1(x)$ à $\varphi_2(x)$ et toute la question est de savoir ce que devient ce point a quand y_0 tend vers Y_0.

Supposons que a devienne indéterminé. Comme la fonction $a(y_0)$ est analytique, le domaine d'indétermination pour $y_0 = Y_0$ est continu, et, s'il ne se réduit pas à un point, il comprend des points en dehors des points ξ; soit $x = \alpha$ un de ces points-limites. Il existe *des* valeurs de y_0 assez voisines de Y_0 pour que la différence $a - \alpha$ soit aussi petite qu'on veut.

Or, ce point α étant distinct des points ξ, l'intégrale $y = \varphi(x, \alpha, y_0)$ admet un nombre fini de branches toutes *algébroïdes* par rapport à y_0, pourvu que y_0 soit suffisamment voisin de Y_0. Pour chacune des branches, on pourra donc décrire un cercle de centre Y_0 à l'intérieur duquel la branche considérée est algébroïde, et, comme le nombre des branches est fini, on pourra, en définitive, affirmer qu'il existe un nombre ρ tel que sous la condition $|y_0 - Y_0| < \rho$ *toutes* les branches de l'intégrale $\varphi(x, \alpha, y_0)$ sont algébroïdes. De même, toutes les branches de l'intégrale $\varphi(x, x_0, y_0)$ sont algébroïdes par rapport à x_0 et y_0 dans deux cercles l'un de centre α et de rayon r, l'autre de centre Y_0 et de rayon ρ.

Donnons en particulier à y_0 une valeur $\overline{y_0}$ prise dans le cercle $|y_0 - Y_0| < \frac{\rho}{2}$, et telle que l'on ait $|a(\overline{y_0}) - \alpha| < \frac{r}{2}$. Parmi les branches de l'intégrale $\varphi(x, a, \overline{y_0})$ se trouvent justement les deux branches φ_1 et φ_2 qui se permutent autour de a. D'autre part, les n branches de l'intégrale $\varphi(x, x_0, y_0)$ sont algébroïdes pour $|x_0 - a| < \frac{r}{2}$ et $|y_0 - \overline{y_0}| < \frac{\rho}{2}$ et, en particulier, pour $x_0 = \alpha$, $y_0 = Y_0$. Donc les deux branches φ_1, φ_2 sont deux branches d'une même fonction algébroïde pour $x_0 = \alpha$, $y_0 = Y_0$. Les deux branches $z_1(x)$, $z_2(x)$ se permutent donc autour de α, et le point Y_0 est un point ordinaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, tous les points critiques mobiles ou, si l'on veut, toutes les branches de la fonction analytique $a(y_0)$ sont bien déterminées quel que soit Y_0. Donc, si l'on considère $y = \varphi(\overline{x}, \overline{x_0}, \overline{y_0})$ comme une fonction analytique de y_0, les seuls points transcendants possibles de cette fonction sont les points Y_0 tels que l'une des branches au moins de $a(y_0)$ tende vers un point ξ quand y_0 tend vers Y_0.

Avant d'aborder la démonstration du théorème C, je ferai encore une remarque. Étant donnée une équation algébrique du premier ordre dont l'intégrale a un nombre fini de valeurs, pour une intégrale *déterminée* $y = \varphi(x, \overline{x_0}, \overline{y_0})$, ce nombre est le même en tout point x_0 du plan. Nous avons vu, en effet, dans le Chapitre précédent, qu'une fonction qui admet un nombre *borné* et variable de branches, admet certainement des coupures en dehors des points algébriques. Or, nous savons ici que les singularités de l'intégrale en dehors des points algébriques sont en nombre fini. Le résultat annoncé s'en déduit.

Abordons maintenant la démonstration du théorème C. Soit n le nombre maximum des branches de l'intégrale générale

$$y = \varphi(x, x_0, y_0).$$

D'après ce qui précède, nous pouvons donner au point x_0 une position fixe, et tout revient à étudier le nombre des branches de la fonction de x, $\varphi(x, \overline{x_0}, \overline{y_0})$, suivant les différentes valeurs de y_0. Il faut mon-

trer que le nombre des branches de l'intégrale qui se permutent autour des points critiques mobiles ne dépend pas de y_0.

Supposons d'abord que les points Y_0, pour lesquels on a $a(Y_0) = \xi$, ne forment pas de lignes. Nous sommes alors certains que, pour avoir le nombre des branches de l'intégrale permutables autour des points critiques mobiles, on n'a qu'à considérer *toutes* les branches de la fonction analytique $\bar{\varphi}(y_0) = \varphi(\bar{x}, \bar{x_0}, y_0)$. C'est une fonction à un nombre limité de branches et dont les seuls points singuliers sont des points critiques algébriques et des points Y_0 qui sont transcendants ordinaires. Or, une fonction ne peut avoir de points transcendants ordinaires quand elle n'a pas de coupure et qu'elle a un nombre borné de branches. Donc, certainement, le nombre de ses branches ne dépend pas de y_0, et, de plus, ses seuls points singuliers sont algébriques. L'intégrale considérée comme fonction de la constante n'a que des singularités algébriques.

On pourrait encore dire : la fonction inverse $y_0(y)$ est la fonction $y_0 = \varphi(\bar{x_0}, \bar{x}, y)$. Elle n'a, elle aussi, qu'un nombre fini de branches, parce que les branches de cette fonction de y sont toutes des déterminations de l'intégrale définie par les conditions initiales $\bar{x}$, $\bar{y}$. La fonction $\bar{\varphi}$ et son inverse ayant un nombre fini de branches, elles ne peuvent avoir que des singularités algébriques (car elles n'ont pas de coupures). De plus, non seulement la fonction $\bar{\varphi}$ n'a que des singularités algébriques, mais c'est une fonction algébrique de la constante.

Quand les points Y_0 forment des lignes, le raisonnement précédent ne s'applique plus. Je vais montrer que ce cas ne peut pas se présenter et que, par suite, les conclusions ci-dessus sont toujours vraies.

Soit L une ligne de points Y_0. Considérons l'affixe a d'un point critique mobile comme une fonction analytique de y_0. Quand y_0 tendra vers un point de L, une branche de cette fonction au moins tendra vers un des points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; considérons la fonction suivante

$$(a-\xi_1)(a-\xi_2)\ldots(a-\xi_p) = P(a) = \Phi(y_0).$$

C'est une fonction analytique de y_0 qui peut admettre les points de L comme points *transcendants*. Cette fonction peut avoir une infinité de branches (car une fonction qui admet un nombre fini de

branches peut très bien avoir une infinité de points critiques algébriques ([1]). Mais les seules singularités possibles de cette fonction Φ sont d'abord des points critiques algébriques et ensuite des points Y_0 qui peuvent être de nature *transcendante*, mais en chacun desquels la fonction prend la valeur zéro.

Prenons alors une branche déterminée de cette fonction qui tende vers zéro quand y_0 tend vers un point Y_0 de L. Considérons le domaine Δ des points y_0 dont la distance à L est inférieure à ε, et prolongeons analytiquement la branche choisie de toutes les manières possibles dans cette bande. Elle se permutera avec certaines autres branches de Φ. On peut toujours supposer que le segment de L sur lequel on a construit le domaine Δ, d'une part, et ε d'autre part, ont été choisis assez petits pour que ce prolongement ne permette pas de franchir la coupure L; en d'autres termes, on aura, par un tel choix de Δ et de ε, exclu celles des branches de Φ qui pourraient ne pas admettre L comme coupure. Alors toutes les branches permutables dans Δ avec la branche qui a été choisie au début tendront vers zéro quand le point y_0 tendra vers un point arbitraire de L d'une façon quelconque.

Je dis encore que toutes ces branches tendent *uniformément* vers zéro dans les mêmes conditions. J'entends par là qu'on peut choisir ε assez petit pour que le module de $\Phi(y_0)$ reste inférieur à un nombre η donné d'avance quelle que soit la façon dont on prolonge dans Δ la branche primitive. Supposer le contraire reviendrait à admettre que, quelque petite que soit la distance $y_0 Y_0$ (Y_0 étant un certain point de L), on aurait *des* points y_0 faisant prendre à $\Phi(y_0)$ une valeur supérieure en module à η. Il y aurait par suite une branche de fonction Φ qui, lorsque le point y_0 tendrait vers un point de L suivant un certain chemin, ne pourrait pas tendre vers zéro. Or les branches de Φ n'admettent aucun point d'indétermination. Donc en un point de L, ladite branche prendrait une valeur différente de zéro. Elle ne pourrait, par suite, être de celles qui se permutent avec la

---

([1]) Par exemple, la fonction à deux branches définie par l'équation

$$y^2 - 2y = e^x.$$

branche primitive, car on pourrait la prolonger au delà de L. Donc cette hypothèse est à rejeter.

Il suffit maintenant de reprendre la démonstration bien connue donnée par M. Painlevé dans sa Thèse pour voir que la fonction Φ doit, dans ces conditions, être identiquement nulle. Il est nécessaire de préciser et de compléter cette démonstration pour l'appliquer au cas actuel : Ayant déterminé ε de façon que $\Phi(y_0)$ soit limité en module dans Δ, nous pourrons toujours prendre sur L un arc AB assez petit pour que les conditions suivantes soient remplies : soient y' et y'' les extrémités de cet arc ; posons

$$y_1 - y' = (y_0 - y')\,e^{i\alpha_1},$$
$$y_2 - y'' = (y_0 - y'')\,e^{i\alpha_2},$$

et ensuite

$$\Phi_1(y_0) = \Phi(y_1), \qquad \Phi_2(y_0) = \Phi(y_2).$$

Considérons la fonction

$$F(y_0) = \Phi(y_0)\,\Phi_1(y_0)\,\Phi_2(y_0).$$

Cette fonction est définie dans un triangle curviligne T formé par AB et les deux lignes obtenues en faisant tourner L d'un angle α_1 autour de y' et d'un angle α_2 autour de y''. Nous pourrons toujours prendre y', y'', α_1 et α_2 tels que ce triangle soit intérieur au domaine Δ dans lequel nous savons que $|\Phi(y_0)| < \eta$.

Nous définirons dans cette aire la fonction F en prolongeant de toutes les façons possibles trois branches de la fonction Φ en ayant bien soin de prendre pour valeurs initiales : pour $\Phi(y_0)$ notre branche initiale et pour $\Phi(y_1)$ et $\Phi(y_2)$ deux branches obtenues à partir de la précédente aux points y_1 et y_2, sans sortir de Δ.

Alors nous pourrons affirmer que la fonction F est une fonction analytique multiforme *bornée* dont toutes les branches sont *nulles* sur le contour de T et plus généralement en tous les points singuliers non algébriques.

Quand y_0 décrit ce domaine, le point $F(y_0)$ décrit dans son plan un domaine continu borné qui admet donc pour frontière une ligne. Or ces points frontières ne peuvent provenir ni d'un point régulier, ni d'un

point algébrique de F, et, comme en tous ses points non algébriques F est nulle, on voit que $F(y_0)$ est identiquement nulle. Donc une au moins des fonctions $\Phi(y_0)$, $\Phi_1(y_0)$, $\Phi_2(y_0)$ et par suite toutes les trois sont nulles. Le théorème est donc démontré.

Je remarque que la dernière partie de la démonstration précédente permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si une fonction analytique n'a, en dehors des singularités algébriques, que des points transcendants ordinaires en chacun desquels elle prend la même valeur, ces points transcendants ne peuvent former une ligne* [1].

5. *Autres applications.* — Je signalerai pour terminer deux autres applications du théorème A.

La première est relative aux fonctions uniformes et *continues* dans une aire. Considérons une telle fonction que nous supposerons analytique en tous les points de cette aire Δ sauf pour un certain ensemble de points ne comprenant pas d'aire, mais supposons que si l'on tend vers un de ces points sur un chemin quelconque la fonction tend toujours vers la même valeur variable avec le point considéré.

Les points singuliers de la fonction dans Δ ne peuvent former un ensemble dénombrable et, d'après les travaux de M. Painlevé, la fonction ne peut non plus avoir dans cette aire de ligne singulière *isolée*. Mais les théorèmes de M. Painlevé n'excluent pas le cas d'une coupure dont tous les points seraient limites de points singuliers ou de coupures. D'autre part d'après le théorème A nous pouvons affirmer qu'il ne peut y avoir aucun ensemble discontinu de points singuliers. Donc les seules singularités possibles sont des *lignes* dont chacune doit être limite de lignes. Si l'on veut, la fonction ne peut avoir qu'un ensemble parfait de lignes singulières dans Δ. A vrai dire les recherches de M. Painlevé ne portent pas sur les lignes définies d'une façon générale mais seulement sur les lignes ayant un arc. Mais il est bien vraisemblable que le résultat demeure exact dans le cas général. Quant

[1] Par exemple la fonction inverse d'une fonction uniforme qui a un nombre *fini* de points essentiels ne présente aucun ensemble continu de points singuliers.

à l'existence d'un ensemble parfait de lignes singulières elle n'est pas incompatible avec la continuité de la fonction et l'on peut en former facilement des exemples. Mais je crois que ce cas pourrait aussi être exclu en supposant que la fonction continue dans Δ est holomorphe sur le contour de Δ, ce qui reviendrait à dire que la fonction est analytique au sens de Weierstrass dans toute l'aire, sauf sur un ensemble non superficiel.

6. En second lieu je rappelle que, d'après le théorème de MM. Poincaré et Volterra, toute équation $f(z) = a$ où f est analytique a une infinité dénombrable de racines, *au moins si a est un point non singulier de la fonction inverse*. Mais, comme le signale M. Borel [1], il n'en est peut-être plus de même si a est singulier. Supposons que f soit uniforme, je dis que, si l'ensemble des zéros de $f(z) - a$ n'est pas dénombrable, la fonction f a des coupures. En effet, soit E cet ensemble non dénombrable de zéros. L'ensemble $E + E'$ est fermé et non dénombrable. C'est donc la somme d'un ensemble parfait F et d'un ensemble dénombrable. Si E et E' n'avaient aucun point commun, E ne contiendrait aucun point de F; E serait dénombrable, ce qui est impossible. Donc E contient au moins un point de son dérivé et le même raisonnement montre qu'il en contient un ensemble non dénombrable.

Donc la fonction $f(z) - a$ a une infinité non dénombrable de points singuliers. Mais, comme en chacun de ces points elle doit être nulle, chacun d'eux doit appartenir à une coupure d'après le théorème A.

Si les coupures sont isolées elles sont en infinité dénombrable [2], l'une d'elles au moins doit donc contenir une infinité non dénombrable de zéros de $f(z) - a$. Ceci nous amène à nous poser cette question : *Une fonction uniforme peut-elle être nulle en un ensemble non dénombrable de points d'une coupure isolée?* Question intéressante mais qui paraît bien difficile à aborder.

---

(1) *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 56.

(2) Car chacune peut être entourée d'une aire ne contenant aucune coupure. Or, dans un plan, des aires sans points communs sont toujours en infinité dénombrable (*voir* les Mémoires de M. G. Cantor, *Acta*, t. II).

J'arrête ici ces indications et les applications du théorème A. Une étude plus approfondie des ensembles discontinus de singularités et de la façon dont se comporte la fonction dans leur voisinage en élargira sans doute le champ. Qu'il me suffise d'avoir montré la nécessité et l'intérêt d'une telle étude.

ERRATA.

Page 4, ligne 9, *au lieu de* algébrique en y', y, *lisez* algébrique en y', y et x.

Page 14, ligne 7 en remontant, *au lieu de*

$$\sum \frac{e^{-p-q}}{p(z-1)-q_i};$$

lisez

$$\sum \frac{e^{-p-q}}{p(z-1)-qi};$$

Étude sur les transformations infinitésimales;

Par M. N. SALTYKOW.

1. Il s'agit, dans les lignes suivantes, d'étudier les rapports entre les transformations infinitésimales, les facteurs intégrants et les systèmes canoniques de Liouville (¹), correspondant aux équations aux différentielles ordinaires ou totales. On en conclut que toute transformation infinitésimale qu'ils admettent définit une intégrale des équations de Liouville. Ce fait est d'une grande importance pour constater encore une fois le sens particulier de la théorie en question, comme il se trouve aussi indiqué dans mon travail : *Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles* (²); d'autre part, la même conclusion est importante pour l'intégration des équations admettant un groupe de transformations infinitésimales. En effet, adoptant notre point de vue, le dernier problème devient un corollaire de la théorie des équations canoniques et l'on diminue aisément le nombre des quadratures nécessaires, d'après S. Lie, pour achever l'intégration des équations considérées.

2. Prenons d'abord une équation unique

$$dy = X\,dx, \tag{1}$$

(¹) *Cf.* Laurent, *Traité d'Analyse*, t. VI, p. 96.
(²) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897, p. 429.

X étant une fonction de x et y. Le facteur intégrant p de cette dernière équation est égal à $\frac{\partial f}{\partial y}$, la fonction f étant l'intégrale de l'équation

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

D'autre part, p est défini aussi par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial p}{\partial x} + X\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}p = 0,$$

équivalente au système de deux équations ordinaires, dont la première est (1), la seconde étant

$$dp = -\frac{\partial X}{\partial y}p\,dx.$$

Ces deux équations forment le système canonique de Liouville

$$dy = \frac{\partial H}{\partial p}dx, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial y}dx,$$

où l'on a posé

$$H = Xp.$$

Donc le facteur intégrant d'Euler coïncide avec la variable auxiliaire de Liouville qu'il introduit pour former son système canonique équivalent à une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Enfin, l'équation partielle corrélative au système canonique de Liouville est identiquement $Xf = 0$.

Soit la transformation infinitésimale admise par l'équation (1)

$$Uf = \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

η dépendant de x et y. L'identité fondamentale

$$(Xf, Uf) = 0$$

fait voir que l'équation

$$\eta p = b$$

est une intégrale du système canonique de Liouville et que la valeur résultante

$$p = \frac{b}{\eta_1}$$

présente un facteur intégrant de (1), b désignant une constante arbitraire. Donc le rapport $\frac{1}{\eta_1}$ en est de même un facteur intégrant.

Les mêmes considérations s'étendent à une équation aux différentielles totales

$$(2) \qquad dx = \sum_{h=1}^{m} X_h \, dt_h,$$

équivalente au système jacobien

$$X_h f \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les X_h étant des fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_m, x$. Le facteur intégrant p de (2) satisfait au système jacobien [1]

$$\frac{\partial p}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_h}{\partial x} p = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

équivalent à deux équations aux différentielles totales : l'équation (2) et la suivante

$$dp = -\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_h}{\partial x} p \, dt_h.$$

En introduisant les notations

$$X_h p \equiv H_h,$$

ces deux dernières équations deviennent

$$dx = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p} dt_h, \qquad dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x} dt_h$$

---

[1] On nomme ordinairement *jacobiens* les systèmes homogènes seulement.

et forment le système que nous avons appelé *canonique* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1889; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1899, p. 454).

Chaque transformation infinitésimale de l'équation (2)

$$Uf \equiv \eta \frac{\partial f}{\partial x},$$

η dépendant de $t_1, t_2, \ldots, t_m, x$, vérifie les identités

$$(X_h f, Uf) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Par conséquent, l'on a évidemment une intégrale du système canonique de Liouville généralisé

$$\eta p = b,$$

définissant les facteurs intégrants

$$\frac{b}{\eta}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\eta}$$

de l'équation (2) dont l'intégrale devient

$$\int \frac{1}{\eta}\left(dx - \sum_{h=1}^{m} X_h\, dt_h\right) = a,$$

où b et a sont des constantes arbitraires.

Donc, *toute équation aux différentielles totales, admettant une transformation infinitésimale, s'intègre par une quadrature.*

S. Lie avait indiqué ([1]) ce résultat en partant de sa théorie des multiplicateurs d'un système complet d'équations partielles linéaires du premier ordre d'une seule fonction. Or ce théorème est évident *a priori*, car une équation aux différentielles totales peut être transformée, d'après M. A. Mayer, dans une équation ordinaire, pour laquelle la conclusion analogue a lieu.

([1]) S. Lie, *Mathematische Annalen*, Bd. XI, p. 504-521. — A. Mayer, *Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen...* (*Berichte u. d. Verhandlungen d. K. Sächsischen G. d. W. zu Leipzig*, 1893).

Le même résultat s'obtient encore d'une nouvelle manière, indépendamment des équations canoniques de Liouville, car, en développant les identités caractéristiques $(X_h f, Uf) = 0$, on en tire les équations démontrant que le rapport $\frac{1}{\tau_1}$ est le facteur intégrant requis [1].

Or, l'introduction des équations de Liouville présente un avantage important, cette méthode se prêtant à la généralisation sur les systèmes d'équations simultanées; et, comme on le verra, le théorème de Liouville relatif aux intégrales en involution par rapport au système canonique résout d'une manière élégante le problème d'intégration, par des quadratures, des systèmes d'équations admettant un groupe de transformations infinitésimales satisfaisant à certaines conditions.

En appliquant, par exemple, le théorème en question au cas étudié d'une équation unique, on retrouve aisément l'intégrale écrite plus haut.

5. Considérons à présent un système d'équations différentielles ordinaires

$$(3) \qquad dx_i = X_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i étant des fonctions des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. En désignant par

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

le système de n facteurs intégrants de Jacobi des équations (3), on a les égalités suivantes (C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, 1896, p. 68)

$$(4) \qquad \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k X_k = -\dfrac{\partial f}{\partial t}, \end{cases}$$

---

(1) Ces dernières sont évidemment

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial \tau_1}{\partial x} = \frac{\partial X_h}{\partial x}\tau_1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

f représentant une intégrale de l'équation partielle linéaire

$$(5) \qquad \mathrm{X}f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

D'autre part, en éliminant la fonction f du système (4), on obtient les équations définissant les valeurs des p

$$(6) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial x_i} p_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(7) \qquad \frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r},$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices r et k de 1 à n. Par conséquent, les fonctions requises p sont des solutions des équations (6), satisfaisant aux conditions (7). D'après Jacobi (*Gesammelte Werke*, Bd. IV, p. 7, n° 5) le système (6) est équivalent aux équations

$$dx_i = \mathrm{X}_i\, dt, \qquad dp_i = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{X}_k}{\partial x_i} p_k\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

constituant précisément le système canonique de Liouville correspondant aux équations étudiées (3), car en posant

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k p_k \equiv \mathrm{H},$$

il s'ensuit

$$(8) \qquad dx_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} dt, \qquad dp_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour en tirer les valeurs des p, vérifiant les conditions (7), le problème revient à intégrer l'équation partielle corrélative au système canonique (8). Or cette dernière équation, que l'on obtient en remplaçant dans H les p_i par les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, est identique à l'équation (5). Inversement le système canonique de Liouville s'obtient en

appliquant à cette dernière équation linéaire la théorie générale des équations partielles.

Le système canonique de Liouville joue un rôle considérable dans la théorie des transformations infinitésimales. Soit, en effet,

$$Uf \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

une transformation infinitésimale des équations (3), $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignant des fonctions des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Comme Uf est une intégrale de (5), en même temps que f, il s'ensuit l'identité fondamentale

$$(Xf, Uf) = 0.$$

Cela étant, *la formule*

$$Uf = b$$

est une intégrale du système canonique de Liouville, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *y étant remplacées par les variables* p_i *et* b *désignant une constante arbitraire* (1).

---

(1) Comme il est connu, on obtient, en développant l'identité précédente, les équations définissant les *coefficients* ξ_i [M. A. Buhl, dans sa Thèse : *Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe,* appelle les ξ_i *fonctions adjointes* et Uf *forme aux dérivées partielles adjointe* du système (3)] :

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce dernier système est équivalent, d'après Jacobi, au système formé par les équations (3) et les suivantes

$$d\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui ne diffèrent *des équations aux variations* de M. H. Poincaré que par les notations des variables fonctionnelles $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, liées avec les ξ_i par les

4. Les résultats cités s'étendent immédiatement aux systèmes d'équations aux différentielles totales

$$(9) \qquad dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h \, dt_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i^h étant des fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_m; x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D'abord il est évident que la transformation de Liouville s'applique aux dernières équations, car en introduisant les nouvelles variables

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

définies par les équations

$$dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} y_k \, dt_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble de ces dernières et des équations données représente un système canonique. En effet, les équations écrites forment, en premier lieu, un système aux différentielles totales. Secondement, en posant

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^h y_k = H_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les $2n$ équations étudiées prennent la forme *canonique*

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial y_i} dt_h, \qquad dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1899; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1899, p. 454).

---

relations

$$\delta x_i = \xi_i \, \delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarquons, enfin, que les $2n$ équations considérées forment un système canonique, lorsque le système (3) est lui-même canonique.

Cela posé, les facteurs intégrants de Jacobi du système (9)

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

sont, d'après la définition même, les dérivées partielles correspondantes

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

f désignant une intégrale du système jacobien,

$$(10) \qquad X^h f \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

D'autre part, les p_i satisfont au système d'équations aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_h} + \sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} p_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les conditions (7) y étant jointes. Les nm équations obtenues représentent évidemment une généralisation de celle qui définit le facteur intégrant d'une seule équation différentielle ordinaire du premier ordre. J'ai donné la théorie de ces dernières équations dans mon travail : *Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (¹). Il en résulte que, dans le cas qui nous occupe, le système équivalent d'équations aux différentielles totales est précisément celui de Liouville, que l'on obtient en remplaçant les variables y_i par les p_i dans les équations canoniques écrites plus haut, ou bien encore en appliquant au système jacobien (10) la théorie générale des équations partielles. Quant aux conditions (7), on y satisfait aussi, moyennant cette dernière théorie.

Enfin, il est aisé de voir que *toute transformation infinitésimale*

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897, p. 423.

du système (9)

$$Uf \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

ξ_i *désignant des fonctions de* $t_1, t_2, \ldots, t_m;\ x_1, x_2, \ldots, x_n$, *donne lieu à une intégrale*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i = b$$

du système canonique de Liouville, équivalant aux équations (9), b *étant une constante arbitraire.*

Le fait constaté est fondamental et nous servira de base dans nos recherches ultérieures. Il va s'en dire qu'en introduisant les équations canoniques de Liouville, on augmente le nombre des variables. Or les nouvelles variables, étant introduites par la théorie des transformations infinitésimales, elles caractérisent la portée et la vraie valeur de la théorie étudiée; les complications résultant de leur introduction sont donc naturelles au problème d'intégration des équations en question.

En passant à présent à l'étude des intégrales des équations canoniques de Liouville, nous bornerons nos démonstrations aux équations ordinaires, car leur théorie présente une analogie complète avec celles aux différentielles totales.

5. Soient

$$(11) \qquad f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les n intégrales distinctes du système (3), les a_k désignant des constantes arbitraires. Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_n}$$

représentent, d'après la définition même, n facteurs intégrants de Jacobi du système (3), que nous allons désigner par

$$p_{1k}, \quad p_{2k}, \quad \ldots, \quad p_{nk}.$$

Le nombre des intégrales distinctes (11) étant n, on a n systèmes distincts de facteurs intégrants, en faisant parcourir à l'indice k toutes les valeurs de 1 à n. Enfin les n dernières équations (8) étant linéaires par rapport aux p, elles admettent évidemment les solutions

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} b_k p_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

b_k désignant des constantes arbitraires. Comme le déterminant fonctionnel

$$M = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

représentant le *multiplicateur* du système (3) de Jacobi est distinct de zéro, les n dernières équations écrites nous donnent

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{ik}}{M} p_i = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

en désignant par M_{ik} le premier mineur de M, correspondant à son élément p_{ik} situé à l'intersection de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $i^{\text{ième}}$ ligne.

L'ensemble des équations (11) et (12) définit les $2n$ intégrales distinctes du système (8). Il s'ensuit donc que, les n intégrales du système étudié (3) étant connues, les n autres intégrales du système canonique de Liouville correspondant s'obtiennent par des opérations de différentiation.

Il est aisé de voir que les intégrales (11) et (12) forment un système *canonique*. Effectivement on a, en premier lieu,

$$(f_s, f_r) = 0,$$

pour les valeurs distinctes des indices s et r de 1 à n. Comme toutes les valeurs p_{ik} satisfont aux conditions (7), il en est de même des fonctions p_i. Par conséquent, les intégrales (12) sont en involution. En désignant donc par F_k les premiers membres des équations (12),

on a les identités

$$(F_s, F_r) = 0,$$

les indices s et r parcourant les valeurs de 1 à n. Enfin, l'on a

$$(F_s, f_r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} p_{kr}.$$

En substituant les valeurs des dérivées $\frac{\partial F_s}{\partial p_k}$, on obtient

$$(F_s, f_r) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} M_{ks} p_{kr},$$

et il en résulte, moyennant les propriétés du déterminant M,

$$(F_s, f_r) = \begin{cases} 0, & r \gtrless s, \\ 1, & r = s. \end{cases}$$

Donc les intégrales (11) et (12) représentent le système *canonique par rapport aux équations* (8). Il s'ensuit, de plus, que *ces dernières admettent n intégrales en involution linéaires par rapport aux variables auxiliaires de Liouville* p_i.

6. Ces préliminaires posés, passons au but principal de la théorie des transformations infinitésimales : l'intégration des équations étudiées (3)

Il ne s'agit ici que des cas où l'on connaît un groupe de transformations infinitésimales admis par le système (3). Dans les considérations qui vont suivre, nous mettrons de côté toutes les opérations, pour former de nouvelles transformations infinitésimales, ou en tirer de nouvelles intégrales des équations (3), et nous supposerons qu'il n'y ait point d'intégrale connue, car on parvient, dans tous ces cas, à un nouveau problème d'intégration analogue, dont l'ordre est moindre que celui du primitif.

Soient

(13) $$U_1 f, \quad U_2 f, \quad \ldots, \quad U_n f$$

les transformations infinitésimales distinctes [1] du groupe admis par le système (3), en introduisant la notation

$$U_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Cela étant, le système (8) admet n intégrales linéaires par rapport aux variables auxiliaires de Liouville, et le problème revient à intégrer un système canonique, dont on connaît la moitié des intégrales linéaires relativement aux variables d'une même classe. Donc l'idée de S. Lie consiste, au fond, à introduire dans le calcul les intégrales de la seconde classe, par rapport au système canonique de Liouville, en rapportant les intégrales requises à la première classe.

Considérons, en premier lieu, l'hypothèse où les transformations infinitésimales (13) forment un *groupe en involution*, c'est-à-dire que l'on a les identités

$$(U_s f, U_r f) = 0$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices s et r de 1 à n. Les équations

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

forment alors n intégrales distinctes en involution du système (8), b_k désignant des constantes arbitraires. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

ne s'annulant pas, il vient, en désignant par Δ_{ri} le mineur de Δ corres

(1) Nous appelons *distinctes* les transformations infinitésimales qui ne sont pas liées entre elles par des relations linéaires.

pondant à son élément ξ_{ri},

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Delta_{ri}}{\Delta} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

ces dernières valeurs p_r satisfaisant aux conditions (7). Il en résulte, les b_k étant des constantes arbitraires, les identités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\Delta_{ri}}{\Delta}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\Delta_{ki}}{\Delta}\right) \qquad (k, r = 1, 2, \ldots, n),$$

l'indice i parcourant toutes les valeurs de 1 à n. On en conclut que les rapports

$$\frac{\Delta_{1i}}{\Delta}, \quad \frac{\Delta_{2i}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_{ni}}{\Delta}$$

représentent un système de facteurs intégrants des équations (3). Par conséquent, leurs intégrales requises deviennent

$$\int \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ki}}{\Delta}(dx_k - X_k\, dt) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les fonctions sous le signe d'intégrale étant des différentielles exactes et les a_i désignant des constantes arbitraires.

S. Lie avait trouvé ce résultat en démontrant que la résolution du problème considéré exigeait n quadratures distinctes (*Math. Annalen*, Bd. XI, p. 517). Or il est aisé de voir qu'il suffit d'effectuer une seule quadrature, les intégrales requises s'en déduisant par différentiation.

On a effectivement, en appliquant la théorie des équations aux dérivées partielles, que l'expression

$$df = -\,\mathrm{H}\, dt + \sum_{r=1}^{n} p_r\, dx_r$$

est une différentielle exacte, les p_r ayant les valeurs trouvées plus haut. Soit

$$f = \mathrm{V}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) + b$$

l'intégrale de cette dernière différentielle, b étant une nouvelle con-

stante arbitraire. Le théorème de Jacobi-Liouville nous donne alors les intégrales demandées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les premiers membres sont indépendants des constantes b_i, car ces dernières entrent linéairement dans la fonction V. D'ailleurs, moyennant l'expression de cette dernière fonction, on voit aisément que les intégrales dernièrement écrites sont identiques aux précédentes.

Les résultats obtenus se rapportent également à tout système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue, admettant un groupe de transformations infinitésimales, dont les parenthèses de Poisson s'expriment en fonction des premiers membres des équations données et que nous nommerons *groupe complet*. En effet, dans ce dernier cas, l'intégration des équations considérées revient au problème précédent, moyennant des opérations algébriques.

Comme application de la théorie développée, considérons, par exemple, le système

$$dx = X\,dt, \qquad dy = Y\,dt,$$

admettant le groupe de transformations infinitésimales distinctes

$$U_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad U_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

X, Y, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 désignant des fonctions de t, x, y.

Il y a deux cas à distinguer : ou bien l'on a

$$(U_1 f, U_2 f) = 0,$$

ou, secondement, il existe la relation

$$(U_1 f, U_2 f) = U_1 f.$$

En posant, dans la première hypothèse,

$$U_1 f = b_1, \qquad U_2 f = b_2,$$

b_1, b_2 étant des constantes arbitraires, effectuons la quadrature

$$f = \int \frac{1}{\Delta}\left[(b_1\eta_2 - b_2\eta_1)(dx - X\,dt) + (b_2\xi_1 - b_1\xi_2)(dy - Y\,dt)\right] + b,$$

b étant une nouvelle constante arbitraire et Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Les deux intégrales requises deviennent

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = a_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial b_2} = a_2,$$

où a_1 et a_2 sont des constantes arbitraires, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, $\frac{\partial f}{\partial b_2}$ ne contenant point b_1 et b_2.

Dans la seconde hypothèse, on a évidemment le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + X\frac{\partial x}{\partial f} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \xi_1\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

admettant la transformation infinitésimale $U_2 f$. En résolvant ces deux dernières équations par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, on obtient un système jacobien; l'équation équivalente aux différentielles totales devient

$$dy = \frac{\eta_1}{\xi_1}dx + \left(Y - \frac{\eta_1}{\xi_1}X\right)dt,$$

et admet la transformation infinitésimale

$$U'_2 f = \frac{\Delta}{\xi_1}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Par conséquent, le rapport $\frac{\xi_1}{\Delta}$ représente le facteur intégrant de la dernière équation aux différentielles totales, et son intégrale

$$\int \frac{\xi_1}{\Delta}\left[dy - \frac{\eta_1}{\xi_1}dx - \left(Y - \frac{\eta_1}{\xi_1}X\right)dt\right] = a_1$$

est, en même temps, l'une des intégrales des équations données, a_1 désignant une constante arbitraire.

La seconde intégrale s'obtient tout de suite par une quadrature. Effectivement, en substituant dans les équations données la valeur de y, tirée de l'intégrale trouvée, on obtient une équation unique

$$dx = (X)\,dt$$

admettant la transformation infinitésimale

$$U'_1 f \equiv (\xi_1)\frac{\partial f}{\partial x},$$

les parenthèses désignant le résultat de l'élimination effectuée. Donc l'intégrale requise devient

$$\int \frac{1}{(\xi_1)}[dx - (X)\,dt] = a_2,$$

a_2 étant une constante arbitraire.

7. Passons à présent au second cas d'intégrabilité par des quadratures, correspondant à l'hypothèse que le groupe des transformations infinitésimales (13) du système (3) est *intégrable*. S. Lie achève alors l'intégration des équations étudiées par n quadratures. Il est évident, en effet, que, dans ces conditions, on arrive à intégrer l'une après l'autre n équations aux différentielles totales, admettant chacune une transformation infinitésimale [1].

Or, nous allons démontrer que le nombre des quadratures nécessaires pour achever l'intégration du système (3), admettant le groupe intégrable (13), que nous désignerons par G, est égal au nombre des *sous-groupes dérivés* du groupe G augmenté d'une unité. Donc, *toutes les fois que* G *admet moins de* n *sous-groupes dérivés, il suffit du même nombre de quadratures augmenté d'une unité pour achever l'intégration de* (3).

[1] S. Lie, *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 517-518. — S. Lie et Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, p. 708-709.

Supposons, en effet, que les m transformations infinitésimales distinctes

$$U_1 f, \quad U_2 f, \quad \ldots, \quad U_m f$$

engendrent le premier sous-groupe dérivé de G, en sorte que les identités suivantes

$$(U_s f, U_r f) = \sum_{k=1}^{m} c_{srk} U_k f$$

aient lieu pour toutes les valeurs distinctes des indices s et r de 1 *à n*, c_{srk} désignant des constantes.

Cela étant, on a évidemment le système complet des équations

$$Xf = 0, \qquad U_1 f = 0, \qquad U_2 f = 0, \qquad \ldots, \qquad U_m f = 0,$$

admettant le *groupe complet* de $n - m$ transformations infinitésimales distinctes

$$U_{m+1} f, \quad U_{m+2} f, \quad \ldots, \quad U_n f.$$

L'intégration de ces dernières équations s'effectue par une quadrature et l'on en tire $n - m$ intégrales du système primitif (3). Soient ces dernières résolubles par rapport aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. En substituant leurs valeurs obtenues dans les équations (3), on obtient le système équivalent

$$X' f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} (X_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

admettant le groupe de m transformations infinitésimales distinctes

(14) $$U'_1 f, \quad U'_2 f, \quad \ldots, \quad U'_m f,$$

où l'on a posé

$$U'_k f \equiv \sum_{i=1}^{m} (\xi_{ik}) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution opérée.

Or, d'après l'hypothèse faite sur le groupe G, son sous-groupe

transformé (14) admet un sous-groupe dérivé. Donc le nouveau problème d'intégration est analogue au précédent; en répétant le même procédé, on parvient aisément à évaluer toutes les intégrales requises du système (3), moyennant des quadratures, dont le nombre est identique au nombre des sous-groupes dérivés du groupe G augmenté d'une unité.

Considérons, par exemple, le système

$$dx = \mathrm{X}\,dt, \qquad dy = \mathrm{Y}\,dt, \qquad dz = \mathrm{Z}\,dt,$$

admettant le groupe des transformations infinitésimales distinctes

$$\mathrm{U}_1 f, \quad \mathrm{U}_2 f, \quad \mathrm{U}_3 f,$$

assujetties aux conditions

$$(\mathrm{U}_1 f, \mathrm{U}_2 f) = 0, \qquad (\mathrm{U}_1 f, \mathrm{U}_3 f) = \mathrm{U}_1 f, \qquad (\mathrm{U}_2 f, \mathrm{U}_3 f) = 0,$$

en posant

$$\mathrm{U}_i f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Le premier sous-groupe dérivé de notre groupe contient une seule transformation infinitésimale $\mathrm{U}_1 f$. Par conséquent, en intégrant le système

$$\mathrm{X}f = 0, \qquad \mathrm{U}_1 f = 0, \qquad \mathrm{U}_2 f = b_1, \qquad \mathrm{U}_3 f = b_2,$$

on obtient, par une quadrature,

$$f = \mathrm{V}(t, x, y, z, b_1, b_2) + b,$$

b_1, b_2, b étant des constantes arbitraires. Il en résulte deux intégrales du système donné

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b_1} = a_1, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b_2} = a_2,$$

a_1, a_2 désignant deux constantes arbitraires.

Remarquons encore qu'en posant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

et en désignant par Δ_{ri} le mineur de ce dernier déterminant correspondant à son élément situé à l'intersection de la $r^{\text{ième}}$ colonne et de la $i^{\text{ième}}$ ligne, on met aisément les deux intégrales obtenues sous la forme des quadratures suivantes, moyennant les considérations du n° **6**,

$$\int\left[\frac{\Delta_{12}}{\Delta}(dx - X\,dt) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}(dy - Y\,dt) + \frac{\Delta_{32}}{\Delta}(dz - Z\,dt)\right] = a_1,$$

$$\int\left[\frac{\Delta_{13}}{\Delta}(dx - X\,dt) + \frac{\Delta_{23}}{\Delta}(dy - Y\,dt) + \frac{\Delta_{33}}{\Delta}(dz - Z\,dt)\right] = a_2.$$

Les deux dernières intégrales supposées résolubles par rapport à y et z, la troisième intégrale demandée s'obtient par une quadrature

$$\int \frac{1}{(\xi_1)}[dx - (X)\,dt] = a_3,$$

a_3 étant une nouvelle constante arbitraire.

8. S. Lie a appliqué, dans le Tome XI des *Mathematische Annalen* (p. 521), la théorie des transformations infinitésimales à la résolution de la question connue sous le nom du *problème de S. Lie*, et dont j'ai donné une solution élémentaire dans ma Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 août 1903. La théorie qui vient d'être développée nous permet de simplifier l'exposition de S. Lie, car on va voir que le problème revient, en définitive, à une seule quadrature, résultant du théorème classique de Jacobi-Liouville.

Considérons, en effet, le système des équations en involution

$$(15)\qquad f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignent les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_q}{p_1, p_2, \ldots, p_q}\right)$$

ne s'annulant pas. Supposons que le système en involution correspondant

$$(16)\qquad (f_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

admette r intégrales distinctes

$$(17)\qquad f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_q,\ f_{q+1},\ \ldots,\ f_r \qquad (r < 2n - q),$$

formant un groupe fonctionnel. Cela étant, le système (16) admet $r - q$ transformations infinitésimales distinctes

$$U_i f \equiv (f_{q+i}, f) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r - q).$$

Nous allons chercher à en former de nouvelles

$$V f \equiv \sum_{i=1}^{r-q} \pi_i(f_1, f_2, \ldots, f_r)\, U_i f,$$

s'annulant pour les valeurs (17) de la fonction f. Il est donc nécessaire, pour définir les $r - q$ valeurs inconnues $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r-q}$, d'avoir les égalités

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_{is}\pi_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r - q),$$

où l'on a posé

$$\alpha_{is} \equiv (f_{q+i}, f_{q+s}).$$

Comme ce dernier système est linéaire, homogène, le déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{r-q,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{r-q,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{1,r-q} & \alpha_{2,r-q} & \ldots & \alpha_{r-q,r-q} \end{vmatrix}$$

doit être identiquement nul. Supposons de plus que les intégrales (17) jouissent des propriétés d'annuler non seulement Δ, mais aussi tous ses mineurs depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $m - 1$. Comme il est bien connu, le nombre $r - q - m$ est alors pair; nous le désignerons par 2ρ

$$r - q - m = 2\rho.$$

Soit, pour fixer les idées,

$$D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\rho,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\rho,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,2\rho} & \alpha_{2,2\rho} & \dots & \alpha_{2\rho,2\rho} \end{vmatrix},$$

le premier mineur de Δ distinct de *zéro*.

Cela étant, les 2ρ premières équations (18) nous donnent

$$\pi_i = -\sum_{\sigma=1}^{m} \frac{D_{i\sigma}}{D} \pi_{2\rho+\sigma} \qquad (i = 1, 2, \dots, 2\rho),$$

$D_{i\sigma}$ désignant ce que devient le déterminant D, en y remplaçant ses éléments de la $i^{\text{ième}}$ colonne par les valeurs

$$\alpha_{2\rho+\sigma,1}, \quad \alpha_{2\rho+\sigma,2}, \quad \dots, \quad \alpha_{2\rho+\sigma,2\rho}.$$

En substituant les valeurs obtenues des π_i, l'expression Vf devient

$$Vf \equiv \sum_{\sigma=1}^{m} \pi_{2\rho+\sigma} V_\sigma f,$$

où l'on a posé

$$V_\sigma f \equiv U_{2\rho+\sigma} f - \sum_{i=1}^{2\rho} \frac{D_{i\sigma}}{D} U_i f \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Les coefficients $\pi_{2\rho+\sigma}$ étant complètement arbitraires, il en résulte que les fonctions $V_\sigma f$ sont des transformations infinitésimales distinctes du système (16), s'annulant pour les valeurs (17) de la fonction f. On démontre de plus aisément que ces dernières transformations infinitésimales forment un *groupe en involution*. En effet, d'après les propriétés de Δ, le groupe fonctionnel (17) admet m fonctions *distinguées*, distinctes des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_q$. En les désignant par Φ_1, $\Phi_2, \dots, \Phi_m$, on a les identités

$$V_\sigma f \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i\sigma}(\Phi_i, f) + \sum_{k=1}^{q} \beta_{k\sigma}(f_k, f),$$

$\alpha_{i\sigma}$, $\beta_{k\sigma}$ représentant des fonctions des intégrales (17). Il en résulte ([1]) donc que les $V_\sigma f$ sont en involution. Par conséquent, l'ensemble des équations (16) et des suivantes

$$V_\sigma f = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m)$$

forme un système en involution, possédant r intégrales (17), et dont l'intégration fournit, dans le cas le moins favorable, moyennant $n - q - m - \rho$ opérations d'intégration, $n + \rho - r$ intégrales en involution

(19) $$f_{r+1}, \quad f_{r+2}, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho},$$

étant de plus en involution avec les intégrales (17). Les parenthèses de Poisson

$$V_{m+s} f \equiv (f_{r+s}, f) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n - q - m - \rho)$$

offrent donc de nouvelles transformations infinitésimales du système (16), engendrant avec les m précédentes $V_\sigma f$ un *groupe en involution* de $n - q - \rho$ transformations infinitésimales distinctes et s'annulant pour toutes les valeurs (17), (19) de f.

Cela étant, introduisons, au lieu de $x_{n-\rho+1}$, $x_{n-\rho+2}$, $\ldots$, x_n, p_1, $\ldots$, p_n, comme nouvelles variables les intégrales (17), (19), supposées résolubles par rapport aux précédentes variables. Soit le système (16) transformé

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{n-q-\rho} X_{sk} \frac{\partial f}{\partial x_{q+s}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

admettant évidemment le groupe en involution de $n - q - \rho$ transformations infinitésimales distinctes

$$V'_\sigma f \equiv \sum_{s=1}^{n-q-\rho} \xi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_{q+s}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n - q - \rho),$$

([1]) Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 50-51.

où les coefficients X_{sk}, $\xi_{s\sigma}$ dépendent des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}$ et des valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho}$ considérées comme constantes.

Posons

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \ldots & \xi_{n-q-\rho,1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{n-q-\rho,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{1,n-q-\rho} & \xi_{2,n-q-\rho} & \ldots & \xi_{n-q-\rho,n-q-\rho} \end{vmatrix},$$

et soit Δ'_{si} le mineur correspondant à l'élément ξ_{si}. L'intégration du dernier système s'achève par une seule quadrature de la différentielle exacte

$$df = \sum_{s=1}^{n-q-\rho} \sum_{i=1}^{n-q-\rho} b_i \frac{\Delta'_{si}}{\Delta'} \left(dx_{q+s} - \sum_{k=1}^{q} X_{sk}\, dx_k \right),$$

les intégrales requises étant représentées par les formules

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-q-\rho),$$

que l'on met encore aisément sous la forme suivante

$$\int \sum_{s=1}^{n-q-\rho} \frac{\Delta'_{si}}{\Delta'} \left(dx_{q+s} - \sum_{k=1}^{q} X_{sk}\, dx_k \right) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-q-\rho),$$

les b_i, a_i désignant des constantes arbitraires.

Enfin, l'intégrale complète des équations (15) s'obtient par une nouvelle quadrature.

Sur l'équilibre de température d'un corps invariable et la stabilité de cet équilibre;

PAR M. P. DUHEM.

---

1. Le corps que nous allons étudier ne sera supposé ni isotrope, ni homogène; nous supposerons, à la vérité, que sa constitution varie d'un point à l'autre d'une manière continue; mais cette restriction aura simplement pour objet d'abréger nos formules; elle n'a rien d'essentiel et pourrait être aisément levée.

En revanche, nous ferons une restriction qui jouera un rôle essentiel dans nos raisonnements en supposant que chacun des éléments qui composent ce corps est invariable de forme et de position et que son état est entièrement déterminé par sa température T.

Soit dS un élément superficiel appartenant au corps considéré; par un point (x, y, z) de cet élément, menons-lui une demi-normale dont a, b, c soient les cosinus directeurs; dans le sens marqué par cette demi-normale et pendant le temps dt, l'élément dS laisse passer une quantité de chaleur dQ donnée par la formule

$$(1) \qquad dQ_1 = -(a f_x + b f_y + c f_z)\, dS\, dt.$$

Les trois quantités f_x, f_y, f_z sont elles-mêmes définies par les

égalités

$$(2) \qquad \begin{cases} f_x = K_1 \dfrac{\partial T}{\partial x} + C_3 \dfrac{\partial T}{\partial y} + C_2 \dfrac{\partial T}{\partial z}, \\ f_y = C_3 \dfrac{\partial T}{\partial x} + K_2 \dfrac{\partial T}{\partial y} + C_1 \dfrac{\partial T}{\partial z}, \\ f_z = C_2 \dfrac{\partial T}{\partial x} + C_1 \dfrac{\partial T}{\partial y} + K_3 \dfrac{\partial T}{\partial z}. \end{cases}$$

Les six quantités K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3 dépendent de l'état du corps au point (x, y, z); ce sont donc, en général, des fonctions de x, de y, de z et de T; nous supposerons ici qu'elles dépendent seulement des variables x, y, z.

Soit dm une masse élémentaire appartenant au corps considéré; dans le temps dt, elle dégage une quantité de chaleur donnée par la formule

$$(3) \qquad dq = -\gamma \frac{\partial T}{dt} dm\, dt,$$

γ étant la chaleur spécifique au point (x, y, z); cette chaleur spécifique dépend de l'état du corps au point (x, y, z); c'est donc, en général, une fonction des quatre variables x, y, z, T. Nous supposerons ici qu'elle ne dépend point de T.

De ces principes on tire, par une méthode bien connue, cette conséquence : En chaque point du corps et à chaque instant, on a l'égalité

$$(4) \qquad \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \rho\gamma \frac{\partial T}{\partial t},$$

ρ étant la densité au point (x, y, z); cette densité est une fonction des seules variables x, y, z.

A ces principes, la théorie de la conductibilité de la chaleur joint, en général, le postulat suivant :

La forme quadratique en X, Y, Z

$$(5) \qquad \begin{cases} P(X, Y, Z) = K_1 X^2 + K_2 Y^2 + K_3 Z^2 \\ \qquad\qquad + 2 C_1 YZ + 2 C_2 ZX + 2 C_3 XY \end{cases}$$

est une forme définie positive.

C'est à l'examen de ce postulat que nous allons nous attacher.

2. Imaginons que tous les points de la surface qui limitent le système soient maintenus à une même température T_0, cas auquel on devra avoir à tout instant, en tout point de cette surface limite,

$$T = T_0. \tag{6}$$

Ou bien, imaginons que la surface limite soit imperméable à la chaleur; si n_i est la demi-normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du corps et si λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de n_i, on aura, en tout point de la surface limite et à tout instant,

$$\lambda f_x + \mu f_y + \nu f_z = 0. \tag{7}$$

Ou bien encore, concevons que certaines parties de la surface limite soient maintenues à la température fixe et uniforme T_0, tandis que d'autres parties sont imperméables à la chaleur; la condition (6) sera alors vérifiée, à tout instant, en tout point marqué sur l'une des premières parties, tandis que la condition (7) sera vérifiée, à tout instant, en tout point que contient l'une des secondes parties.

Dans ces conditions, il est bien clair que l'équilibre thermique sera établi sur le système si la température est la même en tous ses points, cette valeur uniforme de la température étant, d'ailleurs, celle que l'on maintient en tout point de la surface, ou seulement en certains points de la surface, dans le cas où l'on impose au système une telle condition.

Cet équilibre thermique est-il stable?

Fixons d'abord exactement le sens de cette question.

Soit T_0 la température uniforme qui correspond à cet état d'équilibre; posons

$$\Theta = T - T_0 \tag{8}$$

et désignons par Θ_0 la valeur initiale de Θ.

Si l'on peut imposer à la quantité

$$J_0 = \int \Theta_0^2 \, d\varpi, \tag{9}$$

où l'intégration s'étend à tous les éléments $d\varpi$ du système, une limite supérieure A_0 telle que la quantité

$$(10) \qquad J = \int \Theta^2 \, d\varpi$$

demeure, quel que soit t, inférieure à une limite positive A, arbitrairement choisie et donnée d'avance, l'équilibre sera stable; il sera instable dans le cas contraire.

3. Avant de pousser plus loin, il nous faut remplacer cette définition de la stabilité par une autre définition dont nous démontrerons l'équivalence avec la précédente.

Cette nouvelle définition est la suivante :

Si l'on peut imposer à la quantité

$$(11) \qquad M_0 = \int \rho\gamma\Theta_0^2 \, d\varpi$$

une limite supérieure B_0 telle que la quantité

$$(12) \qquad M = \int \rho\gamma\Theta^2 \, d\varpi$$

demeure, quel que soit t, inférieure à une limite positive B donnée d'avance, l'équilibre thermique du système est stable.

Pour justifier ce changement de définition, nous allons montrer, en premier lieu, que tout équilibre thermique, stable selon la première définition, est également stable d'après la seconde.

Dans ce but, désignons par L et l les limites supérieure et inférieure entre lesquelles demeure compris, au sein de notre système, le produit positif $\rho\gamma$. Soit B une quantité positive choisie arbitrairement, et prenons $A = \frac{B}{L}$.

Le système étant, par hypothèse, stable selon la première définition, on pourra trouver une quantité positive A_0 telle que, si l'on a

$$(13) \qquad J_0 = \int \Theta_0^2 \, d\varpi < A_0,$$

on aura toujours

$$J = \int \Theta^2 \, d\varpi \leqq A$$

ou

$$\int L\Theta^2 \, d\varpi \leqq B.$$

Comme $\rho\gamma$ ne surpasse L en aucun point, on aura, *a fortiori*,

$$(14) \qquad M = \int \rho\gamma\Theta^2 \, d\varpi \leqq B.$$

Cette inégalité (14) découle donc de l'inégalité (13).

Posons $B_0 = lA_0$; pour que l'inégalité (13) ait lieu, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\int l\Theta_0^2 \, d\varpi \leqq B_0$$

et, *a fortiori*, que l'on ait

$$(15) \qquad M_0 = \int \rho\gamma\Theta_0^2 \, d\varpi \leqq B_0,$$

puisque $\rho\gamma$ n'est jamais inférieur à l.

Donc, quelle que soit la quantité positive B, on pourra toujours définir une autre quantité positive B_0 telle que l'inégalité (15) entraîne l'inégalité (14); en sorte que notre équilibre thermique sera stable selon la seconde définition.

Nous allons montrer de même qu'un équilibre thermique, stable selon la seconde définition, l'est aussi selon la première.

Considérons, en effet, une quantité positive arbitraire A et prenons $B = lA$.

Le système étant en équilibre stable selon la seconde définition, on peut trouver une quantité positive B_0 telle que l'inégalité

$$(16) \qquad M_0 = \int \rho\gamma\Theta_0^2 \, d\varpi \leqq B_0$$

entraîne constamment l'inégalité

$$(17) \qquad M = \int \rho\gamma\Theta^2 \, d\varpi \leqq B.$$

Mais $\rho\gamma$ n'étant jamais inférieur à l, la condition (17) entraîne, *a fortiori*, la condition

$$\int l\Theta^2\, d\varpi \leqq B$$

ou bien

(18) $$J = \int \Theta^2\, d\varpi \leqq A.$$

D'autre part, comme $\rho\gamma$ n'est jamais inférieur à L, pour que la condition (16) soit vérifiée, il suffit que l'on ait

$$\int L\Theta_0^2\, d\varpi \leqq B_0$$

ou bien

(19) $$J_0 = \int \Theta_0^2\, d\varpi \leqq A_0,$$

en posant $A_0 = \frac{B_0}{L}$.

La condition (19) entraîne donc, quel que soit t, la condition (18), où A est une quantité positive arbitrairement donnée d'avance; l'équilibre, stable selon la seconde définition, l'est encore selon la première.

4. L'équivalence de nos deux définitions de la stabilité étant maintenant établie, nous pourrons dorénavant substituer la seconde à la première; c'est ce que nous ferons pour démontrer la proposition suivante :

Si la surface qui borne un système invariable est ou bien maintenue à une température uniforme et constante, ou bien imperméable à la chaleur, ou bien encore si elle se partage en régions soumises les unes à la première condition et les autres à la seconde, pour que l'équilibre thermique soit stable sur ce système, il faut et il suffit qu'aucun système de valeurs des variables X, Y, Z *ne fasse prendre une valeur négative à la forme* P(X, Y, Z).

Nous allons démontrer d'abord que la condition énoncée est *suffisante*.

Posons, dans ce but,

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} F_x = K_1 \dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + C_3 \dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + C_2 \dfrac{\partial\Theta}{\partial z}, \\ F_y = C_3 \dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + K_2 \dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + C_1 \dfrac{\partial\Theta}{\partial z}, \\ F_z = C_2 \dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + C_1 \dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + K_3 \dfrac{\partial\Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

ces quantités ne différant que par l'écriture de f_x, f_y, f_z.

Nous verrons sans peine que l'égalité (4), vérifiée en tout point du système et à tout instant, peut s'écrire

$$(4\ bis)\qquad \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \rho\gamma \frac{\partial\Theta}{\partial t}.$$

L'égalité (6), vérifiée aux points de la surface qui sont maintenus à température constante, peut s'écrire

$$(6\ bis)\qquad \Theta = 0,$$

tandis que l'égalité (7), vérifiée là où la surface est imperméable à la chaleur, peut s'écrire

$$(7\ bis)\qquad \lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z = 0.$$

Considérons maintenant l'expression

$$\frac{dM}{dt} = 2\int \rho\gamma\Theta \frac{\partial\Theta}{\partial t} d\varpi.$$

En vertu de l'égalité (4 *bis*), on a

$$\frac{dM}{dt} = 2\int \Theta\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) d\varpi$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = &- 2\int \Theta(\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z)\, dS \\ &- 2\int \left(F_x \frac{\partial\Theta}{\partial x} + F_y \frac{\partial\Theta}{\partial y} + F_z \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) d\varpi, \end{aligned}$$

la première intégrale s'étendant à toute la surface qui enclôt le système.

Or, en chaque point de cette surface, on peut écrire soit l'égalité (6 *bis*), soit l'égalité (7 *bis*); si l'on observe alors que

$$F_x \frac{\partial\Theta}{\partial x} + F_y \frac{\partial\Theta}{\partial y} + F_z \frac{\partial\Theta}{\partial z} = P\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right),$$

on voit que l'égalité précédente peut s'écrire

$$(20) \qquad \frac{dM}{dt} = -2\int P\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) d\varpi.$$

Si la forme $P(X, Y, Z)$ ne peut prendre de valeur négative pour aucun système de valeurs des variables X, Y, Z, $\frac{dM}{dt}$ ne peut jamais être positif; M ne peut donc jamais surpasser sa valeur initiale M_0; pour que M ne surpasse à aucun moment la limite, donnée d'avance, B, il suffit que M_0 ne surpasse pas B.

La condition énoncée suffit donc à assurer la stabilité de l'équilibre thermique de notre système.

5. Cherchons maintenant à prouver que la condition énoncée est *nécessaire*.

De l'égalité (20), nous tirons sans peine celle-ci

$$\frac{d^2M}{dt^2} = -4\int \left(F_x \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial t} + F_y \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial t} + F_z \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi,$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2M}{dt^2} = {} & 4\int \frac{\partial\Theta}{\partial t}(\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z)\, dS \\ & + 4\int \frac{\partial\Theta}{\partial t}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

En chaque point de la surface, on peut écrire à chaque instant, soit l'égalité (6 *bis*), soit l'égalité (7 *bis*), en sorte qu'au second membre de l'égalité précédente, le premier terme est nul, le second peut se

transformer par l'égalité (4 *bis*), et l'on trouve ainsi l'égalité

$$(21) \qquad \frac{d^2 M}{dt^2} = 4 \int \rho \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

selon laquelle $\frac{d^2 M}{dt^2}$ ne peut jamais être négatif.

Si, dès lors, il est possible, quelque petite que soit la valeur initiale M_0 de M, de donner à la valeur initiale de $\frac{dM}{dt}$ une valeur positive, M croîtra au delà de toute limite avec t et le système ne pourra pas être en équilibre stable.

Or, nous allons prouver que, si la forme P(X, Y, Z) est susceptible de prendre une valeur négative, il est possible, quelque petite que soit M_0, d'attribuer à $\left(\frac{dM}{dt}\right)_0$ une valeur positive, ce qui démontrera la proposition énoncée.

Supposons donc qu'en un certain point m du système et pour un certain système ξ, η, ζ de valeurs de X, Y, Z, on ait

$$(22) \qquad P(\xi, \eta, \zeta) < 0.$$

Nous pourrons toujours supposer que l'on ait

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

ce qui permet de regarder ξ, η, ζ comme les cosinus directeurs d'une certaine demi-droite δ issue du point m.

Par raison de continuité, on peut entourer le point m d'un domaine D en tout point duquel l'inégalité (22) soit vérifiée.

A l'intérieur du domaine D, construisons une surface fermée de la manière suivante :

Par le point m (*fig.* 1), menons une aire plane Π normale à la demi-droite δ.

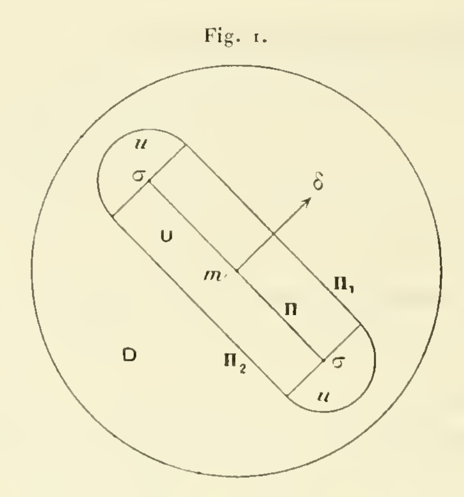
Projetons orthogonalement l'aire Π sur deux plans parallèles au plan Π, équidistants du plan Π et situés à une distance Δ de ce dernier; soient Π_1, Π_2 les deux projections.

Prenons ensuite un demi-cercle de rayon Δ; faisons-le mouvoir de

telle sorte que son centre décrive le contour σ de l'aire Π, tandis que son plan demeure constamment normal à ce contour σ.

Nous désignerons par u le volume engendré par ce demi-cercle, et par U le volume du cylindre droit qui a pour bases les aires Π_1, Π_2.

Fig. 1.



Nous nommerons $\varphi(\delta)$ une fonction qui possède les propriétés suivantes :

La fonction $\varphi(\delta)$ est définie entre les valeurs $-\Delta$ et $+\Delta$ de la variable δ; dans cet intervalle, elle est fonction finie et continue de δ, ainsi que sa dérivée première; sa dérivée seconde $\varphi''(\delta)$ est finie.

Dans cet intervalle, la fonction $\varphi(\delta)$ est une fonction paire de δ.

On a, enfin,

$$\varphi(\quad\Delta) = 0, \qquad \varphi'(\quad\Delta) = 0,$$
$$\varphi(-\Delta) = 0, \qquad \varphi'(-\Delta) = 0.$$

Si, dans le volume U, nous considérons un point situé à la distance δ du plan Π, nous poserons, en ce point,

$$\Theta_0 = \chi\varphi(\delta),$$

χ étant une constante. Nous aurons alors, dans cet espace U,

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial x} = \chi\varphi'(\delta)\xi, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial y} = \chi\varphi'(\delta)\eta, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial z} = \chi\varphi'(\delta)\zeta,$$

et, par conséquent,

$$P\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}, \frac{\partial\Theta_0}{\partial y}, \frac{\partial\Theta_0}{\partial z}\right) = \chi^2[(\varphi'(\delta)]^2 P(\xi, \eta, \zeta).$$

Dans tout le système, hors des volumes u et U, nous prendrons

$$\Theta_0 = 0,$$

partant

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Theta_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Theta_0}{\partial z} = 0.$$

Enfin, dans le volume u, nous prendrons pour Θ_0 une fonction qui, aux limites du domaine u, prenne, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, des valeurs qui se raccordent avec les valeurs extérieures au domaine u. Cette fonction Θ_0 sera évidemment de la forme $\chi\theta$, la fonction θ ne dépendant pas de la valeur attribuée à la constante χ.

Désormais, l'égalité (20) nous donnera

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{dM}{dt}\right)_0 = -2\chi^2 \displaystyle\int_U [\varphi'(\delta)]^2 P(\xi, \eta, \zeta)\, d\varpi \\ \qquad\qquad - 2\chi^2 \displaystyle\int_u P\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) d\varpi. \end{cases}$$

Au second membre de cette égalité (23), le premier terme est assurément positif, en vertu de l'inégalité (22); le signe du second est inconnu; mais on peut toujours faire en sorte que le premier terme donne son signe à tout le second membre.

Sans changer ni le point m, ni l'aire II, remplaçons la distance Δ par une nouvelle distance $\Delta_1 = \frac{\Delta}{p}$, où p est une quantité positive que nous pourrons faire croître au delà de toute limite; en même temps, à la fonction $\varphi(\delta)$, substituons une nouvelle fonction $\varphi_1(\delta)$ telle que $\varphi_1\left(\frac{\delta}{p}\right) = \varphi(\delta)$.

Lorsque nous ferons croître p au delà de toute limite, le domaine U sera infiniment petit comme $\frac{1}{p}$, tandis qu'en ce domaine, $\varphi_1'(\delta)$ sera

infiniment grand comme p : l'intégrale

$$\int_{\mathrm{U}} [\varphi_1'(\delta)]^2 \,\mathrm{P}(\xi, \eta, \zeta)\, d\varpi$$

sera donc infiniment grande comme p.

La fonction θ demeurant finie, $\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}$ seront, dans le domaine u, infiniment grands comme p; $\mathrm{P}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$ sera donc, dans le domaine u, infiniment grand comme p^2. Mais, en même temps, ce domaine u sera infiniment petit comme $\frac{1}{p^2}$. L'intégrale

$$\int_u \mathrm{P}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) d\varpi$$

demeurera finie.

On pourra donc prendre p assez grand pour que la valeur absolue de la première intégrale soit aussi grande que l'on voudra par rapport à la valeur absolue de la seconde; partant, pour que le premier terme impose son signe au second membre de l'égalité (23).

La valeur initiale de $\frac{d\mathrm{M}}{dt}$ est ainsi rendue positive; d'ailleurs, en disposant de la constante χ^2 qu'elle contient en facteur, on peut la rendre aussi petite que l'on veut, en sorte que notre démonstration est achevée.

6. Le problème relatif à la stabilité de l'équilibre thermique sur un corps immobile et invariable est maintenant complètement résolu, à la condition, toutefois, que l'on adopte la définition de la stabilité dont nous avons fait usage. Or, il apparaît de prime abord qu'une infinité d'autres définitions de la stabilité, tout aussi satisfaisantes que celle-là, lui peuvent être substituées.

A la quantité Θ^2 on peut, en effet, dans la définition donnée au n° 2, substituer n'importe quelle fonction $\Phi(\Theta)$ de Θ, pourvu seulement qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

1° Elle s'annule en même temps que Θ;

2° Elle est positive pour toute valeur de Θ qui diffère de 0;

3° Elle croît avec la valeur absolue de Θ;

4° Elle est infinie en même temps que Θ.

Dès lors un état d'équilibre thermique stable peut être défini par le caractère suivant :

Une quantité positive A étant arbitrairement choisie d'avance, il est toujours possible de trouver une quantité positive A_0 assez petite pour que l'inégalité

$$\int \Phi(\Theta_0)\, d\varpi \leqq A_0$$

entraîne, quel que soit t, l'inégalité

$$\int \Phi(\Theta)\, d\varpi \leqq A.$$

Une question s'impose de suite à notre attention : en une semblable définition, le choix de la fonction $\Phi(\Theta)$ est-il indifférent?

La question peut se préciser de la manière suivante :

La stabilité ayant été définie, comme nous venons de le faire, au moyen de la fonction $\Phi(\Theta)$, nous répétons la même définition en substituant à la fonction $\Phi(\Theta)$ une autre fonction analogue $\Psi(\Theta)$. Tout équilibre thermique stable selon la première définition, est-il encore stable selon la seconde définition et inversement?

La réponse à cette question est sûrement affirmative si l'on peut trouver deux nombres positifs l, L, tels que l'on ait, quel que soit Θ,

$$l \leqq \frac{\Psi(\Theta)}{\Phi(\Theta)} \leqq L.$$

Pour le démontrer, il suffit de répéter presque textuellement le raisonnement qui a été exposé au n° **5**.

Hors du cas que nous venons de définir, l'équivalence entre les deux définitions de la stabilité n'est ni évidente, ni prouvée, ni probable.

Par exemple, il ne sera pas indifférent de substituer la fonction $|\Theta|$ à la fonction Θ^2 dans la définition de l'équilibre thermique stable; certaines propositions, vraies dans l'un des deux cas, pourraient ne plus l'être dans l'autre.

7. On peut modifier quelque peu la définition de la stabilité que nous avons donnée aux nos **2** et **6**; après avoir fait choix d'une fonction $\Phi(\Theta)$ qui offre les quatre caractères énumérés au n° **6**, on peut convenir qu'un équilibre thermique stable se reconnaît à la marque suivante :

Que l'on choisisse arbitrairement d'avance un nombre positif quelconque A; on peut toujours trouver un autre nombre positif a_0 tel que la condition

$$|\Theta_0| \leqq a_0,$$

vérifiée initialement en tout point du système, entraîne, quel que soit t, la condition

$$\int \Phi(\Theta)\, d\varpi \leqq \mathrm{A}.$$

Si l'on prend pour $\Phi(\Theta)$ la fonction Θ^2, on obtient une définition de la stabilité qui diffère un peu de la définition donnée au n° **2**; néanmoins, cette nouvelle définition laisse subsister presque textuellement, on le voit sans peine, les raisonnements donnés aux nos **4** et **5**; en sorte que, pour que l'équilibre thermique soit stable selon cette nouvelle définition, il est encore nécessaire et suffisant que la forme quadratique $\mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ ne puisse jamais devenir négative.

L'intérêt de cette nouvelle définition réside dans le théorème suivant :

Supposons que l'équilibre thermique d'un système soit stable lorsqu'on emploie, pour définir cette stabilité, une certaine fonction $\Phi(\Theta)$; *il sera encore stable si, dans la définition, on substitue la fonction* $\Psi(\Theta)$ *à la fonction* $\Phi(\Theta)$, *pourvu que le rapport* $\frac{\Psi(\Theta)}{\Phi(\Theta)}$ *ne croisse pas au delà de toute limite en même temps que* $|\Theta|$. *Les deux fonctions* $\Phi(\Theta)$, $\Psi(\Theta)$ *sont, bien entendu, assujetties aux quatre conditions énumérées au n°* **6**.

Il s'agit de prouver que l'on peut imposer à la valeur absolue de Θ_0, en tout point du système, une limite supérieure a_0 si petite que l'on

ait, quel que soit t,

$$\int \Psi(\Theta)\, d\varpi \leqq \mathrm{B}, \tag{24}$$

B étant un nombre positif arbitrairement choisi d'avance.

Soit V le volume total du système. Soit ϑ une valeur de Θ assez voisine de *zéro* pour que l'on ait assurément les deux conditions

$$\Psi(\vartheta) \leqq \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{V}}, \qquad \Psi(-\vartheta) \leqq \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{V}}.$$

Considérons, à l'instant t, le volume V du système; on peut y distinguer deux parties : l'une, U, où la valeur absolue de Θ est, au plus, égale à la valeur absolue de ϑ; l'autre W, où Θ surpasse ϑ en valeur absolue; on peut écrire

$$\int_{\mathrm{V}} \Psi(\Theta)\, d\varpi = \int_{\mathrm{U}} \Psi(\Theta)\, d\varpi + \int_{\mathrm{W}} \Psi(\Theta)\, d\varpi. \tag{25}$$

En tout point du volume U, $\Psi(\Theta)$ est au plus égal à $\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{V}}$; ce volume U lui-même est au plus égal à V; le premier terme, au second membre de l'égalité (25), est donc au plus égal à $\frac{\mathrm{B}}{2}$. Dès lors, pour que la condition (24) soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{\mathrm{W}} \Psi(\Theta)\, d\varpi \leqq \frac{\mathrm{B}}{2}. \tag{26}$$

Or, d'après l'hypothèse faite, on peut fixer un nombre L tel que, pour toute valeur de Θ qui surpasse ϑ en valeur absolue, on ait

$$\frac{\Psi(\Theta)}{\Phi(\Theta)} \leqq \mathrm{L},$$

en sorte que le premier membre de la condition (26) ne saurait surpasser $\mathrm{L}\int_{\mathrm{U}} \Phi(\Theta)\, d\varpi$; d'ailleurs, le volume U ne saurait surpasser le volume V; le premier membre de la condition (26) ne saurait donc

surpasser la quantité $L\int_V \Phi(\Theta)\,d\varpi$. Pour que la condition (26) soit vérifiée, il suffit que l'on ait

$$(27) \qquad \int_V \Phi(\Theta)\,d\varpi \leqq \frac{B}{2L}.$$

Mais, par hypothèse, l'équilibre thermique du système est stable lorsqu'on fait usage de la fonction $\Phi(\Theta)$ pour définir la stabilité; on peut donc choisir un nombre positif a assez petit pour que la condition

$$|\Theta_0| \leqq a,$$

vérifiée en tous les points du système, assigne, quel que soit t, à l'intégrale $\int_V \Phi(\Theta)\,d\varpi$ une valeur inférieure à n'importe quel nombre positif A donné d'avance et, en particulier, au nombre $A = \frac{B}{2L}$. Notre proposition est donc démontrée.

De cette proposition, on peut faire une application immédiate :

Nous savons que l'équilibre thermique est certainement stable lorsque la forme $P(X, Y, Z)$ ne peut prendre aucune valeur négative, pourvu que l'on définisse la stabilité au moyen de la fonction

$$\Phi(\Theta) = \Theta^2.$$

D'après la proposition précédente, cette condition suffira encore à assurer la stabilité si l'on définit celle-ci au moyen de la fonction

$$\Psi(\Theta) = |\Theta|.$$

Semblable corollaire n'aurait pu être établi si l'on avait conservé la définition de la stabilité donnée au n° **2**.

8. On peut imaginer encore une troisième manière de définir la stabilité thermique d'un système.

Cette stabilité sera caractérisée de la manière suivante :

Si l'on se donne d'avance, arbitrairement d'ailleurs, un nombre

positif a, on pourra toujours trouver un nombre a_0, positif et assez petit, pour que la condition

$$|\Theta_0| \leqq a_0,$$

vérifiée, à l'instant initial, en tous les points du système, entraîne, quel que soit t, la condition

$$|\Theta| \leqq a,$$

vérifiée également en tous les points du système.

Cette nouvelle définition présente, sur les précédentes, un important avantage. On peut à la fonction $|\Theta|$ substituer n'importe quelle autre fonction $\Phi(\Theta)$ remplissant les quatre conditions formulées au n° **6**; on obtient une seconde définition équivalente à la première. Il est donc inutile, lorsqu'on fait usage de cette définition, de se préoccuper de la fonction qui a été choisie pour caractériser la stabilité.

Il est clair que la démonstration donnée au n° **5** garde sa force lorsqu'on fait usage de la nouvelle définition; on peut donc encore énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre thermique du système soit stable, il est *nécessaire* que la forme $P(X, Y, Z)$ ne puisse, en aucun cas, prendre de valeur négative.

Mais notre nouvelle définition de la stabilité fait perdre toute valeur à la démonstration exposée au n° **4**, en sorte que nous ne pouvons plus rien dire touchant les conditions qui *suffisent* à assurer la stabilité de l'équilibre thermique.

La stabilité mécanique de l'équilibre a été définie par Lejeune-Dirichlet pour les systèmes dont l'état dépend d'un nombre limité de variables; lorsqu'on veut étendre cette définition à des systèmes continus dont *chaque élément* dépend d'un nombre limité de variables, on se trouve en présence de diverses formes de généralisation également possibles; selon que l'on adopte une forme ou l'autre, les résultats obtenus peuvent différer notablement; à plusieurs reprises, nous avons insisté ([1]) sur ces divergences.

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouve-*

La stabilité thermique, plus simple que la stabilité mécanique et dont l'étude peut être poussée plus loin, nous paraît très propre à montrer l'importance de ces remarques touchant les diverses définitions de la stabilité.

---

ment de rotation (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. VII, 1901, p. 311). — *Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IX, 1902, p. 233). — *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Ire Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 379). — *Voir* aussi A. LIAPOUNOFF, *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation*, traduit du russe par M. ÉDOUARD DAVAUX. Introduction (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. VI, 1904, p. 5). Le Mémoire russe a paru en 1884.

Médaille Guccia.

A l'occasion du IVe Congrès International des Mathématiciens, qui se tiendra à Rome en l'année 1908, le *Circolo Matematico di Palermo* décernera un prix international de Géométrie. Ce prix, qui sera appelé « MÉDAILLE GUCCIA » (du nom de son fondateur), consistera en une petite médaille portative en or et en une somme de 3000 francs.

On sait que, depuis les travaux auxquels a donné lieu le Prix Steiner décerné en 1882, la théorie des courbes gauches algébriques a été plutôt délaissée, et que même les grands progrès de la Géométrie moderne, obtenus par les méthodes synthétiques, ou algébriques, ou fonctionnelles, ont laissé de côté cette théorie; de sorte que les questions fondamentales, que l'on avait abordées dans les travaux cités, et d'autres questions encore qu'on pourrait se poser, n'ont pas fait l'objet de travaux ultérieurs. Si d'ailleurs on passe de l'espace ordinaire aux espaces supérieurs, on rencontre pour les courbes algébriques (en particulier pour leur classification, pour l'étude des courbes canoniques de genre donné, etc.) une foule de questions importantes dont personne encore ne s'est occupé. D'autre part, l'on connaît bien peu de propositions sur les courbes gauches algébriques obtenues en se limitant au champ réel, ou bien à un champ rationnel donné.

C'est en s'inspirant de ces considérations (mais sans vouloir d'ailleurs limiter d'avance, en aucune manière, les problèmes et les méthodes de recherche), que le *Circolo Matematico di Palermo*, conformément aux intentions du fondateur du prix, décernera la « MÉDAILLE GUCCIA » à

un Mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.

Dans le cas où, parmi les travaux envoyés au concours, aucun Mémoire relatif à la théorie ci-dessus ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à

un Mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des surfaces, ou autres variétés, algébriques.

Les Mémoires destinés au concours devront être : inédits, rédigés en italien, ou français, allemand, anglais, et écrits (sauf les formules) avec la machine à écrire. Munis d'une épigraphe, ils devront parvenir, en trois exemplaires, au Président du *Circolo Matematico di Palermo* **avant le 1er juillet 1907,** accompagnés d'un pli cacheté contenant sur l'enveloppe l'épigraphe adoptée et à l'intérieur le nom et l'adresse de l'auteur. Le mémoire couronné sera inséré dans les *Rendiconti,* ou autre publication, du *Circolo Matematico di Palermo*. L'auteur en recevra 200 tirages à part.

Dans le cas où aucun des Mémoires présentés au concours ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à un Mémoire, sur les théories ci-dessus, qui aura été publié après la publication de ce programme et avant le 1er juillet 1907.

Le prix sera décerné par le *Circolo Matematico di Palermo* conformément à la décision d'une Commission internationale de trois membres, composée de

MM. Max Noether, professeur à l'Université de Erlangen,
Henri Poincaré, professeur à l'Université de Paris,
Corrado Segre, professeur à l'Université de Turin.

La lecture du rapport de la Commission, ainsi que la proclamation du nom du savant couronné de l'attribution du prix, auront lieu à Rome, en 1908, dans une des séances du IVe Congrès International des Mathématiciens.

Palerme, le 1er novembre 1904.

Le Président du *Circolo Matematico di Palermo*,

M. L. Albeggiani.

Calcul des variations d'après Weierstrass;

PAR M. W. ERMAKOFF.

I. — Préface.

Tout le monde sait que le Calcul des variations est redevable d'un progrès réel à Weierstrass, mais peu de mathématiciens savent exactement en quoi consiste sa contribution à cette branche de l'Analyse.

En effet, les leçons de Weierstrass sur le Calcul des variations ne sont pas encore publiées et nous ne pouvons puiser des renseignements sur les travaux du géomètre allemand que dans les publications de E. Zermelo, de A. Kneser et de Nadine Gernet [1].

Weierstrass s'est occupé tout spécialement du problème le plus simple, lorsque sous le signe d'intégration se trouvent une seule fonction et sa dérivée première. Weierstrass a cherché à obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un maximum et d'un minimum. Toutefois, il imposait au problème des restrictions inutiles : il supposait que la fonction, sous le signe $\int$, était holomorphe dans un certain domaine.

---

[1] E. ZERMELO, *Untersuchung zur Variationsrechnung*, Berlin, 1894. — A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Berlin, 1900. — NADESCHDA GERNET, *Untersuchung zur Variationsrechnung*, Göttingue, 1902.

Étant donné que, dans le Calcul des variations, nous avons affaire aux variables réelles, il suffit de supposer que les fonctions que l'on considère soient continues dans un certain domaine. Aucune autre restriction ne doit y être introduite.

Les recherches de Weierstrass l'ont conduit à un résultat très important, qui n'a pas été assez remarqué : il a montré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin infiniment voisin et que le signe de cet accroissement dépend de celui de la fonction à intégrer. Ainsi, il n'y a aucune nécessité de faire des calculs compliqués pour trouver la variation seconde. Le maximum et le minimum dépendent entièrement du signe d'une certaine fonction que j'appellerai *fonction de Weierstrass*. Toutefois, ce résultat n'est exact que dans le cas où certaines fonctions dont dépend la fonction de Weierstrass sont continues sur le chemin infiniment voisin. Weierstrass a, en outre, attiré notre attention sur ce fait que les maxima et les minima peuvent être *forts* et *faibles*. Expliquons-nous. Un chemin est dit *chemin de Lagrange* s'il satisfait aux équations différentielles de Lagrange. Appelons *chemin voisin* un chemin infiniment voisin du chemin de Lagrange. Supposons que l'intégrale prise le long du chemin de Lagrange soit minima. Si les tangentes en deux points correspondants du chemin de Lagrange et un chemin voisin forment entre elles un angle infiniment petit, nous avons un minimum *faible;* si, par contre, les tangentes en deux points correspondants de ces courbes forment un angle fini, nous avons un minimum *fort*. S'il existe un minimum fort, il va sans dire qu'il existe également un minimum faible; mais il peut se présenter des cas où le minimum faible existe et le minimum fort fait défaut.

Dans le Tome 17 du *Journal de Crelle,* Jacobi a montré que la variation seconde ne se réduit à sa plus simple expression que lorsqu'un certain déterminant formé avec les dérivées par rapport aux constantes d'intégration ne devient pas égal à *zéro* sur le chemin de Lagrange. Ce déterminant ne s'annule pas si le chemin de Lagrange ne contient pas de points dits *conjugués*.

Une question se pose alors au sujet du rôle de ces points conjugués dans le Calcul des variations. Cette question n'a pas encore été résolue; toutefois, il a été démontré que, *dans le cas général,* le maxi-

mum et le minimum n'existent pas au delà d'un point conjugué ([1]).

Mais il peut se présenter des cas particuliers où il existe un maximum ou un minimum au delà d'un tel point. Ces cas sont tout particulièrement intéressants. Il est indispensable de donner des conditions pour l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué. Ces conditions sont données dans le paragraphe VII de notre exposé. Les chemins de Lagrange partant d'un même point peuvent avoir une enveloppe; cette enveloppe est le lieu géométrique des points conjugués. Pour certaines raisons, je donne à cette enveloppe le nom de *ligne critique* (*surface critique*). Outre cette enveloppe, il peut exister encore d'autres lignes critiques qui, jusqu'à présent, ont échappé à l'attention des savants. Deux chemins de Lagrange partant d'un même point peuvent être tangents en un autre point. Le lieu des points de contact des chemins de Lagrange est une ligne (surface) critique qui, dans le Calcul des variations, joue le même rôle que l'enveloppe. Le chemin de Lagrange peut, en outre, avoir un point multiple avec des branches tangentes; le lieu géométrique de ces points est une courbe dont le rôle se confond avec celui des deux courbes dont il a été question plus haut. Pour les raisons que je viens d'exposer, il faut compter parmi les points conjugués les points de contact des chemins et des branches de Lagrange. La règle qui permet de reconnaître l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué est bien simple en ceci :

Si la ligne (surface) critique n'a pas de points communs avec le chemin de Lagrange, le maximum et le minimum dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Si la ligne critique, tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne le coupe pas, il n'y aura au delà de ce point ni maximum, ni minimum, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant. Si la ligne critique coupe le chemin de Lagrange (au point conjugué) le maximum et le minimum au delà de ce point dépendent du signe de la fonction de Weierstrass.

([1]) A. Kneser, *Die Jacobi'sche Bedingung des Extremus bei einem Allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung* (Communications de la *Société mathématique de Kharkow*, 2e série, t. VII, n° 6).

Voici le résumé du présent Mémoire :

Dans le paragraphe II est donnée la solution du problème le plus simple du Calcul des variations; il y est montré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin voisin.

Dans le paragraphe III est étudié le cas où, sous le signe d'intégration, se trouvent deux fonctions inconnues et leurs premières dérivées. Il y est également démontré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin voisin, la fonction sous le signe dépendant des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange. Ces intégrales intermédiaires doivent satisfaire à certaines conditions.

Dans le paragraphe IV est donnée une seconde méthode pour trouver les intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange.

Dans le paragraphe V est étudié le cas de maximum et de minimum relatifs.

Dans le paragraphe VI sont établies les conditions nécessaires pour que le maximum et le minimum dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Deux cas douteux y sont élucidés. Le premier de ces cas est celui où la courbe (ou surface) critique a un point commun avec le chemin de Lagrange, mais ne le traverse pas. Le second cas douteux se présente lorsque le chemin de Lagrange contient un point d'indétermination où les intégrales intermédiaires prennent des valeurs indéterminées. Ces deux cas douteux sont résolus dans les deux paragraphes suivants.

Dans le paragraphe VII est donnée une condition fort simple pour l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué.

Dans le paragraphe VIII est étudié le cas où deux points ne déterminent pas complètement le chemin de Lagrange, celui où les équations du chemin de Lagrange passant par les deux points donnés contiennent des constantes arbitraires. Il est démontré qu'une intégrale prise le long du chemin de Lagrange, entre les points donnés, ne dépend pas des constantes arbitraires. Il s'ensuit que, dans le cas où le chemin de Lagrange contient des points en question, l'intégrale n'est ni maxima

ni minima, même lorsque la fonction de Weierstrass conserve un signe constant.

Dans le paragraphe IX, il est montré à quoi se ramène le problème de la détermination du signe de la fonction de Weierstrass. Dans certains cas particuliers, cette détermination est très difficile à faire et il est même impossible d'en donner des règles générales. Cette circonstance se rencontre non seulement dans le Calcul des variations, mais aussi dans les problèmes de maxima et de minima des fonctions algébriques de plusieurs variables lorsque la différentielle du second ordre peut devenir nulle.

Dans le paragraphe X, il est montré comment les résultats trouvés peuvent être appliqués à l'étude du problème le plus général du calcul des variations. On y trouve une nouvelle démonstration fort simple du théorème démontré déjà dans le paragraphe III, à savoir que l'intégration des équations de Lagrange peut être ramenée à la recherche d'une intégrale complète d'une certaine équation aux dérivées partielles. Si l'on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles, les intégrales complètes des équations différentielles de Lagrange peuvent être trouvées à l'aide de simples différentiations. Plus loin sont données les conditions pour l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué. A la fin du paragraphe est donnée la forme de la fonction de Weierstrass ainsi qu'une méthode pour déterminer le signe de cette fonction dans le cas d'un maximum et d'un minimum faibles.

II. — Le problème le plus simple du calcul des variations.

Supposons que nous ayons à tracer entre deux points donnés une courbe telle que l'intégrale

$$(1) \qquad \int f(x, y, y')\,dx,$$

prise le long de cette courbe, soit maxima ou minima.

La considération de la première variation nous conduit à l'équation

différentielle de Lagrange

$$(2) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nous supposons que $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ ne s'annule pas.

Dans ce cas, nous avons une équation du second ordre. L'intégrale complète de cette équation contient deux constantes arbitraires qui sont déterminées par la condition que la courbe passe par les deux points donnés.

Soit

$$(3) \qquad y' = p(x, y, a)$$

une intégrale première de l'équation différentielle de Lagrange (2).

Nous en déduisons

$$y'' = \frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Démontrons le théorème suivant :

Toute intégrale première (3) *de l'équation différentielle de Lagrange* (2) *transforme l'expression*

$$(4) \qquad f(x, y, p)\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x)$$

en une différentielle exacte.

Pour que l'expression (4) soit une différentielle exacte, on doit avoir

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{d}{dy}\left(f - p\frac{\partial f}{\partial p}\right).$$

Dans les deux membres, les dérivées totales doivent être prises en supposant p fonction des variables x et y.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p} - p\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p} + p\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p} + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En substituant y' à p, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'} + y'\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} + y''\,\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui n'est autre que l'équation différentielle de Lagrange (2). Nous en concluons que l'équation (5) est satisfaite, et que, par conséquent, l'expression (4) est une différentielle exacte.

Dans l'exposé qui va suivre, nous supposerons que, dans l'intégrale (3), nous donnons à la constante arbitraire a la valeur qui correspond au chemin de Lagrange considéré.

Si l'expression (4) est une différentielle exacte, son intégrale prise le long d'un chemin arbitraire ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de ses points extrêmes.

Étant donné que $\partial y = y'\,\partial x$, cette intégrale peut s'écrire

$$\int \left\{ f(x, y, p) + (y' - p)\frac{\partial f}{\partial p} \right\} dx.$$

Nous savons que, sur le chemin de Lagrange, $y' = p$. Il en résulte que

$$\underset{\text{Chemin voisin.}}{\int \left\{ f(x, y, p) + (y' - p)\frac{\partial f}{\partial p} \right\} \partial x} = \underset{\text{Chemin de Lagrange.}}{\int f(x, y, y')\,\partial x}$$

La première de ces intégrales est prise le long d'un chemin voisin, la seconde le long du chemin de Lagrange, entre les mêmes points.

En retranchant les deux membres de cette égalité de l'intégrale

$$\int f(x, y, y')\,\partial x$$

prise le long du chemin voisin, nous trouvons

$$(6)\quad \begin{cases} \underset{\text{Chemin voisin.}}{\int \left\{ f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)\frac{\partial f}{\partial p} \right\} \partial x} \\ \quad = \underset{\text{Chemin voisin}}{\int f(x, y, y')\,\partial x} - \underset{\text{Chemin de Lagrange.}}{\int f(x, y, y')\,\partial x} \end{cases}$$

Dans le second membre de l'équation, nous avons l'accroissement total de l'intégrale (1). Ainsi, l'accroissement total de l'intégrale (1) est exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin voisin. Examinons le signe de cet accroissement. Supposons que le chemin voisin coïncide avec le chemin de Lagrange, sur tout le parcours, à l'exception d'une partie infiniment petite; dans ce cas, le signe de l'intégrale qui se trouve dans le premier membre de l'équation (6) est celui de la fonction sous le signe d'intégration

$$(7) \quad W(x, y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Il ne nous reste plus qu'à examiner le signe de cette fonction.

Pour qu'il existe un maximum et un minimum, il faut et il suffit que la fonction de Weierstrass (7) *conserve le même signe en chaque point du chemin voisin arbitraire.*

Jusqu'à présent, nous n'avons pas indiqué les conditions nécessaires pour que toutes nos déductions soient exactes. Nous avons dit tout d'abord que nous cherchions une courbe continue entre deux points donnés; il s'ensuit que y doit être une fonction continue entre les limites de l'intégration. Nous supposerons que y' est également une fonction continue entre les mêmes limites, c'est-à-dire que le chemin de Lagrange n'a ni points anguleux ni tangentes parallèles à l'axe des Y. Il a été ensuite question de la première variation; mais, pour l'existence de cette variation, il faut que la fonction sous le signe

$$f(x, y, y')$$

et ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ soient continues sur le chemin voisin.

Telles sont les restrictions qui découlent de la nature du problème.

Passons à l'analyse des résultats établis dans ce paragraphe. Nous avons démontré que l'intégrale de l'expression (4) ne dépend pas de la forme du chemin suivi, mais seulement des points extrêmes. Mais cette conclusion n'est exacte qu'à la condition que les fonctions qui figurent dans l'expression (4) soient continues sur le chemin d'intégration. Il s'ensuit que $p(x, y)$ doit être une fonction continue tant sur le chemin de Lagrange que sur le chemin voisin.

L'intégrale première (3) doit être une fonction continue des variables x et y sur le chemin de Lagrange et sur le chemin voisin.

Le théorème qui fait dépendre le maximum et le minimum de l'intégrale (1) du signe de la fonction de Weierstrass n'est vrai que si toutes ces conditions sont remplies.

III. — Cas de deux fonctions inconnues.

Considérons le cas plus général où l'on demande de tracer entre deux points donnés une courbe telle que l'intégrale

$$(1) \qquad \int f(x, y, z, y', z')\,\partial x$$

prise le long de cette courbe soit maxima ou minima.

L'examen de la première variation nous conduit aux équations différentielles de Lagrange :

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right).$$

Nous supposons que l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'}\right)^2$$

ne s'annule pas; dans ce cas, les intégrales complètes des équations différentielles (2) contiennent quatre constantes arbitraires qui sont déterminées par la condition que le chemin de Lagrange passe par les deux points donnés.

Soient

$$(3) \qquad y' = p(x, y, z, a, b), \qquad z' = q(x, y, z, a, b),$$

des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange (2).

Nous en déduisons :

$$y'' = \frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad z'' = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial y} + q\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Par analogie avec le dernier paragraphe, nous devons nous attendre à ce que l'expression

$$(4)\qquad f(x, y, z, p, q)\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial f}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x)$$

soit une différentielle exacte.

Il faut pour cela que

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{df}{dy}\left(f - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right), \\ \frac{d}{dz}\left(f - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right), \\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right). \end{aligned}\right.$$

Montrons que les équations de Lagrange (2) découlent des équations (5). Observons tout d'abord que, dans les égalités (5), les dérivées totales doivent être prises en supposant p et q fonctions de x, y et z. Multiplions la troisième des égalités (5) par q et ajoutons à la première; nous obtiendrons

$$\frac{d}{dy}\left(f - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}\right) + q\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + q\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right).$$

Substituons dans cette dernière équation aux dérivées totales leurs expressions. Après quelques réductions nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}\right) \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial y} + q\frac{\partial q}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

En substituant y' et z' à p et q, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial x} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y} + z'\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z} + y''\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + z''\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'},$$

qui n'est autre que la première des équations (2).

Ainsi, les équations de Lagrange (2) découlent des égalités (5). Mais la réciproque n'a pas lieu; des deux équations de Lagrange (2)

ne peuvent pas être déduites les trois égalités (5). Il s'ensuit qu'en général l'expression (4) ne sera pas une différentielle exacte pour un système quelconque d'intégrales intermédiaires (3).

Montrons que les intégrales intermédiaires (3) pourront toujours être choisies de façon que l'expression (4) soit une différentielle exacte.

Dans ce but, considérons les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(x, y, z, y', z') - y'\dfrac{\partial f}{\partial y'} - z'\dfrac{\partial f}{\partial z'}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z'}, \end{cases}$$

où v est une fonction inconnue auxiliaire de x, y et z.

En éliminant y' et z' de ces équations, nous obtenons une équation aux dérivées partielles

$$\Theta\left(x, y, z, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.$$

Soit

$$v = v(x, y, z, a, b) + c$$

une intégrale complète de cette équation.

En portant la valeur trouvée de v dans les équations (6), ces équations ne seront plus indépendantes; l'une d'elles sera la conséquence des deux autres. Par conséquent les valeurs de y' et de z' tirées de deux des équations (6) satisferont également à la troisième équation.

Soient

$$(7)\qquad y' = p(x, y, z, a, b), \qquad z' = q(x, y, z, a, b)$$

ces solutions.

En portant les valeurs de v, y' et z' dans les équations (6), nous obtiendrons des identités.

En multipliant ces identités par ∂x, ∂y, ∂z, et en les ajoutant, nous aurons

$$dv = f(x, y, z, p, q)\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial f}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x).$$

Nous en concluons que les égalités (7) transforment l'expression (4) en une différentielle exacte. Il reste à montrer que les égalités (7) seront des intégrales intermédiaires des équations de Lagrange (2). Cela résulte de ce que les égalités (5) sont satisfaites; or, de ces égalités, comme nous l'avons démontré plus haut, découlent les équations de Lagrange (2).

Dans l'exposé qui va suivre, nous supposerons toujours que, dans les intégrales intermédiaires (7), les valeurs des constantes arbitraires a et b sont celles qui correspondent au chemin de Lagrange considéré.

Supposons maintenant que les intégrales intermédiaires (7) soient choisies de telle façon que l'expression (4) devienne une différentielle exacte; dans ce cas, l'intégrale de l'expression (4) ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des points extrêmes. En remarquant que $\partial y = y' \partial x$, $\partial z = z' \partial x$, cette intégrale sera

$$\int \left[f(x, y, z, p, q) + \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(z' - q) \right] \partial x.$$

Étant donné que, sur le chemin de Lagrange, $y' = p$, $z' = q$, nous aurons l'égalité

$$\int_{\text{Chemin voisin.}} \left[f(x, y, z, p, q) + \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(z' - q) \right] \partial x$$
$$= \int_{\text{Chemin de Lagrange.}} f(x, y, z, y', z') \partial x.$$

La première intégrale est prise le long d'un chemin voisin, la seconde le long du chemin de Lagrange, entre les mêmes points.

En retranchant les deux membres de cette égalité de l'intégrale

$$\int_{\text{Chemin voisin.}} f(x, y, z, y', z') \partial x,$$

prise le long du même chemin voisin, le second membre de l'égalité ainsi obtenue représente l'accroissement total de l'intégrale (1) que nous désignerons par Δ.

Nous avons donc

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\text{Chemin voisin.}} \Big[& f(x, y, z, y', z') - f(x, y, z, p, q) \\ & - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial f}{\partial q}(z' - q) \Big] \partial x = \Delta. \end{aligned} \right.$$

Ainsi l'accroissement total de l'intégrale se trouve exprimé par l'intégrale (8) prise le long d'un chemin voisin. Supposons que le chemin voisin coïncide avec le chemin de Lagrange, sur tout son parcours, à l'exception d'une partie infiniment petite de ce parcours; dans ce cas, le signe de l'intégrale (8) est le même que celui de la fonction sous le signe d'intégration :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{W}(x, y, z, y', z') = f(x, y, z, y', z') & - f(x, y, z, p, q) \\ & - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial f}{\partial q}(z' - q). \end{aligned} \right.$$

Pour l'existence d'un maximum et d'un minimum, il faut et il suffit que la fonction de Weierstrass (9) *conserve un signe constant le long d'un chemin voisin arbitraire.* Pour le maximum et le minimum faibles, $y' - p$ et $z' - q$ sont infiniment petits; pour le maximum et le minimum forts, ils ont une grandeur finie.

A quelles conditions les résultats que nous venons de trouver sont-ils exacts? Nous supposons tout d'abord que les fonctions inconnues y, z et leurs dérivées y', z' soient continues entre les limites de l'intégration.

D'autre part, la première variation ne peut exister que dans le cas où la fonction $f(x, y, z, y', z')$ et ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial z'}$ sont continues le long d'un chemin voisin arbitraire, ce que nous supposerons toujours.

En outre, nous avons vu que l'intégrale de l'expression (4) ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des points extrêmes. Ce résultat n'est exact que dans le cas où les fonctions entrant dans l'expression (4) sont continues sur le chemin le long duquel on prend l'intégrale. Mais l'expression (4) contient $p(x, y, z, a, b)$, $q(x, y, z, a, b)$;

ces fonctions doivent donc être continues sur un chemin voisin arbitraire. Nous avions déjà supposé que y' et z' sont continues le long du chemin de Lagrange; il résulte des équations (7) que p et q sont également continues le long du chemin de Lagrange, mais il ne s'ensuit nullement que ces fonctions soient continues sur le chemin voisin.

Nous devons donc tenir compte de la condition suivante :

Les intégrales intermédiaires (3) *doivent être des fonctions continues des variables x, y et z, en tout point d'un chemin voisin arbitraire.*

Ce n'est qu'en imposant les restrictions indiquées plus haut que nous pourrons affirmer l'exactitude du théorème établi ci-dessus concernant la dépendance du maximum et du minimum du signe de la fonction de Weierstrass.

IV. — Deuxième méthode pour la recherche d'intégrales intermédiaires.

Revenons à notre dernier problème, à la recherche du maximum et du minimum de l'intégrale

$$\int f(x, y, z, y', z')\,dx.$$

Le chemin de Lagrange est défini par les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right).$$

Nous avons montré que les intégrales intermédiaires

$$y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z)$$

pouvaient être choisies de telle façon que l'expression

$$(2)\qquad f(x, y, z, p, q)\,dx + \frac{\partial f}{\partial p}(dy - p\,dx) + \frac{\partial f}{\partial q}(dz - q\,dx)$$

devienne une différentielle exacte. Le problème avait été ramené à l'intégration d'une certaine équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre. Exposons maintenant une autre méthode pour la recherche d'intégrales intermédiaires.

Déterminons les intégrales des équations différentielles de Lagrange (1) de telle façon qu'elles représentent une courbe passant par un point donné (x_0, y_0, z_0) situé sur le chemin de Lagrange. Ces intégrales contiennent deux constantes arbitraires

$$y = \varphi(x, a, b), \qquad z = \psi(x, a, b). \tag{3}$$

Étant donné que la courbe représentée par ces équations passe par le point donné (x_0, y_0, z_0), on aura les identités

$$y_0 \equiv \varphi(x_0, a, b), \qquad z_0 \equiv \psi(x_0, a, b). \tag{4}$$

Les équations (3) nous donnent

$$y' = \varphi'(x, a, b), \qquad z' = \psi'(x, a, b). \tag{5}$$

En tirant a et b des équations (3) et en substituant leurs valeurs dans les formules (5), nous obtiendrons les intégrales intermédiaires cherchées

$$y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z),$$

qui transforment l'expression (2) en une différentielle exacte. Pour le prouver, considérons l'intégrale

$$\mathrm{V} = \int_{x_0}^{x} f(x, y, z, y', z')\, dx. \tag{6}$$

En remplaçant y, z, y', z' par leurs expressions (3) et (5), V devient une fonction des trois quantités, x, a et b. Prenons la différentielle totale de cette fonction par rapport à ces trois quantités

$$\left\{\begin{aligned} d\mathrm{V} &= f(x, y, z, y', z')\,\delta x \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial f}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial f}{\partial z'}\,\delta z'\right) dx, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

en posant

$$\delta y = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\partial b, \qquad \delta z = \frac{\partial \psi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \psi}{\partial b}\partial b,$$

$$\delta y' = \frac{\partial \varphi'}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \varphi'}{\partial b}\partial b, \qquad \delta z' = \frac{\partial \psi'}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \psi'}{\partial b}\partial b.$$

En vertu des équations de Lagrange (1), nous pouvons substituer dans la formule (7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)$ à $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

De même, on peut remplacer $\delta y'$ et $\delta z'$ par $\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}$, $\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}$.

L'expression placée sous le signe $\int$ devient une différentielle totale, et l'on aura, en intégrant,

$$d\mathrm{V} = f(x, y, z, y', z')\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z - \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right|_{x=x_0}.$$

Dans cette expression, les deux derniers termes disparaissent, puisque δy et δz sont nuls pour $x = x_0$ en vertu des identités (4). Nous aurons donc

$$(8) \qquad d\mathrm{V} = f(x, y, z, y', z')\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z'}\delta z.$$

Substituons, dans cette dernière formule, à a et b leurs valeurs tirées des équations (3); y et φ' deviennent égales à p, et z' et ψ' à q. En différentiant ensuite les équations (3), par rapport à toutes les variables, nous trouvons

$$\partial y = \varphi'\,\partial x + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\partial b, \qquad \partial z = \psi'\,\partial x + \frac{\partial \psi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \psi}{\partial b}\partial b;$$

d'où

$$\delta y = \partial y - p\,\partial x, \qquad \delta z = \partial z - q\,\partial x.$$

La formule (8) prend donc en définitive la forme suivante :

$$(9) \qquad d\mathrm{V} = f(x, y, z, p, q)\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial f}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x).$$

En résumé :

Substituons à y, z, y' et z' leurs expressions (3) *et* (5), *et évaluons*

l'intégrale (6); *remplaçons ensuite a et b par leurs expressions tirées des équations* (3), *la différentielle totale de la fonction ainsi obtenue s'exprimera par la formule* (9).

V. — Conditions accessoires.

Supposons que nous ayons à trouver le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int f\,\partial x,$$

de façon qu'on ait en même temps

$$(1) \qquad \int f_1\,\partial x = A_1, \qquad \int f_2\,\partial x = A_2, \qquad \int f_3\,\partial x = A_3, \qquad \ldots,$$

le nombre de ces équations de condition étant quelconque et toutes les intégrales étant prises entre les mêmes limites.

Ce problème peut être ramené à la recherche du maximum et du minimum absolu de l'intégrale

$$\int F\,\partial x,$$

dans laquelle

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \ldots,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des facteurs constants. Ces facteurs peuvent être choisis de façon à satisfaire aux égalités de condition (1).

Outre les conditions mentionnées plus haut, on rencontre dans le calcul des variations des conditions d'un autre genre. Examinons le cas le plus simple.

Supposons que nous ayons à déterminer y et z en fonction de x de façon à satisfaire à l'équation

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z, y', z') = 0,$$

et que l'intégrale

$$(3) \qquad \int F(x, y, z, y', z')\, \partial x$$

soit maxima ou minima.

Dans le calcul des variations, ce problème est résolu de la façon suivante. Considérons la fonction

$$\Phi = F + \mu\varphi,$$

μ étant une fonction inconnue auxiliaire de la variable x. On détermine les trois fonctions inconnues à l'aide de l'équation (2) et des équations de Lagrange

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\right).$$

Ici encore, on peut démontrer que les intégrales intermédiaires

$$(4) \quad y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z), \qquad \mu = \mu(x, y, z)$$

peuvent être choisies de telle façon que l'expression

$$(5) \quad \Phi(x, y, z, p, q)\,\partial x + \frac{\partial\Phi}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial\Phi}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x)$$

devienne une différentielle exacte. Ces intégrales intermédiaires peuvent être trouvées de deux façons différentes, comme nous l'avons indiqué dans les paragraphes III et IV.

Étant donné que l'expression (5) devient une différentielle exacte, nous arrivons à cette conclusion que l'accroissement total de l'intégrale (3) peut être exprimé par l'intégrale

$$\int \Big[\Phi(x, y, z, y', z') - \Phi(x, y, z, p, q) - \frac{\partial\Phi}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial\Phi}{\partial q}(z' - q) \Big]\, \partial x,$$

prise le long d'un chemin voisin.

Le signe de cette intégrale dépend de celui de la fonction sous le

signe $\int$:

$$(6)\quad \begin{cases} W(x, y, z, y', z') = \Phi(x, y, z, y', z') - \Phi(x, y, z, p, q) \\ \qquad - \dfrac{\partial \Phi}{\partial p}(y' - p) - \dfrac{\partial \Phi}{\partial q}(z' - q). \end{cases}$$

La seule différence entre ce problème et le problème précédent est que, dans le cas présent, il faut examiner le signe de la fonction de Weierstrass (6) pour celles des valeurs des variables qui satisfont à l'équation de condition (2).

Les conditions restrictives sont ici les mêmes qu'auparavant. Tout d'abord, les fonctions y, z, y', z' et μ doivent être continues entre les limites d'intégration; en second lieu, la fonction Φ et ses dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z'}$ doivent être continues le long du chemin voisin arbitraire.

Le maximum et le minimum de l'intégrale (1) ne dépendent du signe de la fonction de Weierstrass (6) que dans le cas où les intégrales intermédiaires (4) sont continues le long d'un chemin voisin arbitraire.

L'analyse précédente peut être étendue à un nombre quelconque de variables, avec un nombre quelconque de conditions accessoires.

VI. — Dépendance du maximum et du minimum du signe de la fonction de Weierstrass.

Bornons-nous à l'étude de l'intégrale la plus simple

$$(1)\qquad \int f(x, y, y')\,\partial x;$$

mais les résultats que nous allons établir peuvent être étendus au cas le plus général du calcul des variations.

Nous avons montré au paragraphe II que l'accroissement total de l'intégrale (1) s'exprime par l'intégrale :

$$\int \left[f(x, y, y') - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) \right] \partial x,$$

prise le long d'un chemin voisin; nous avons vu que le signe de la dernière intégrale dépend de celui de la fonction sous le signe $\int$:

$$W(x, y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p).$$

Ce résultat n'est exact que dans le cas où l'intégrale intermédiaire

$$(2) \qquad y' = p(x, y)$$

est une fonction continue des deux variables x et y sur le chemin voisin.

Nous supposons que y' est continue le long du chemin de Lagrange; il s'ensuit que $p(x, y)$ est également continue le long du même chemin, l'équation (2) étant vérifiée identiquement sur le chemin de Lagrange. Mais, si la fonction $p(x, y)$ est continue sur le chemin de Lagrange, il ne s'ensuit nullement que cette fonction soit également continue sur un chemin voisin.

Sur ce chemin, la fonction $p(x,y)$ peut être discontinue dans deux cas que nous indiquerons plus loin.

Supposons que la fonction $p(x,y)$ ait un point critique sur le chemin de Lagrange.

On appelle point critique un point où plusieurs valeurs d'une fonction multiforme deviennent égales.

Supposons qu'en parcourant le chemin de Lagrange, la fonction $p(x,y)$ change de valeur, en passant par le point critique. Il est clair que la fonction $p(x,y)$ ne cesse pas d'être continue, attendu qu'au point critique $p_1(x,y) = p(x,y)$, $p_1(x,y)$ étant la nouvelle valeur de la fonction. Si nous pouvons trouver sur le chemin voisin un point critique pour lequel $p_1 = p$, la fonction $p(x,y)$ sera également continue sur ce chemin. Mais si, au contraire, il n'y a pas de point critique sur le chemin voisin, il est impossible, en parcourant ce chemin, de passer d'une manière continue de la valeur p à la valeur p_1. Dans ce cas, le résultat trouvé par nous est inexact : le maximum et le minimum ne peuvent pas être déterminés par le signe de la fonction de Weierstrass, et il y a incertitude.

Examinons ces cas avec plus de détails.

La fonction $p(x,y)$ contient deux variables; par conséquent, les points critiques de cette fonction seront situés sur une certaine *ligne critique :*

$$y = \psi(x). \tag{3}$$

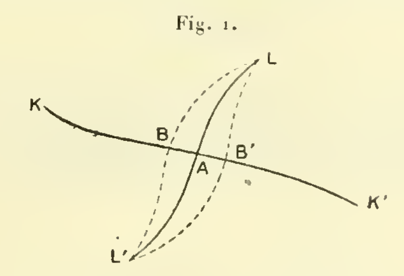
Tout d'abord, faisons observer que, sous le nom de chemin de Lagrange, nous n'entendons que la partie de ce chemin le long de laquelle est prise l'intégrale (1).

Si la ligne critique (3) n'a pas de point commun avec le chemin de Lagrange, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) dépendent du signe de la fonction de Weierstrass.

Supposons maintenant que la ligne critique (3) a un point commun avec le chemin de Lagrange; dans ce cas, il faudrait voir si la ligne critique coupe le chemin de Lagrange ou non.

Supposons que la ligne critique KK′ coupe le chemin de Lagrange LL′ au point A (*fig.* 1). Dans ce cas, sur tout chemin voisin,

Fig. 1.

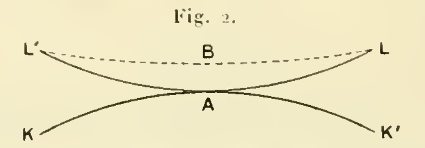


nous pouvons trouver un point critique B ou B′ où p se transforme en p_1, sans solution de continuité. Dans ce cas, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) dépendent du signe de la fonction de Weierstrass.

Supposons que la ligne critique KK′ ne traverse pas le chemin de Lagrange LL′ au point A commun aux deux courbes (*fig.* 2). Dans ce cas, il n'existe pas de point critique sur le chemin voisin LBL′ et, par conséquent, on ne peut pas transformer d'une manière continue p en p_1 en parcourant LBL′. Dans ce cas, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) restent douteux. En d'autres termes :

Le maximum et le minimum de l'intégrale (1) *sont douteux lorsque la ligne critique, tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne le traverse pas en ce point.*

Fig. 2.



Ce cas douteux sera élucidé dans le paragraphe suivant.

Une fonction de plusieurs variables peut avoir un point d'indétermination.

Nous appellerons point d'indétermination *un point où une fonction de plusieurs variables a une valeur indéterminée qui dépend du chemin qui nous amène à ce point.*

Considérons, par exemple, la fonction

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Au point ($x=0$, $y=0$) cette fonction peut prendre une valeur arbitraire, ce qui est facile à montrer. Supposons que nous approchions du point ($x=0$, $y=0$) en suivant la parabole $y=2hx^2-x$; nous aurons

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{2h}{1+(2hx-1)^2}.$$

Pour $x=0$, la fonction devient égale à h.

Supposons maintenant que la fonction $p(x, y)$ ait un point d'indétermination sur le chemin de Lagrange; l'existence d'un tel point ne rend pas la fonction discontinue sur ce chemin. Nous pouvons former un chemin voisin avec deux courbes qui se rencontrent au point d'indétermination sous un angle quelconque. Sur un tel chemin, la fonction $p(x, y)$ sera discontinue. Dans ce cas, le maximum et le minimum restent douteux.

Le maximum et le minimum de l'intégrale (1) *restent douteux*

si l'intégrale intermédiaire (2) *a un point d'indétermination sur le chemin de Lagrange.*

Ce cas douteux sera élucidé dans le paragraphe VIII.

Il ne nous reste plus qu'à indiquer à quels signes on peut reconnaître d'avance si la ligne critique (3) traverse le chemin de Lagrange ou non. Cette question peut être résolue d'une façon très simple. Prenons deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la ligne critique (3); substituons les coordonnées de ces points dans l'intégrale intermédiaire (2). Si y' est réelle aux deux points, la ligne critique traverse le chemin de Lagrange; si y' est imaginaire pour l'un des deux points et réelle pour l'autre, la ligne critique (3) ne peut pas traverser le chemin de Lagrange; enfin, si y' est imaginaire pour les deux points, la ligne critique n'a pas de points communs avec le chemin de Lagrange.

Pour avoir deux points situés de part et d'autre de la ligne critique (3), nous supposerons la coordonnée x arbitraire, et la coordonnée

$$y = \psi(x) \pm \delta^2,$$

où δ est une quantité infiniment petite.

Supposons, par exemple, que l'intégrale intermédiaire ait la forme suivante :

$$y' = 3x^2 + (y - x^3)\sqrt{y - x^2}. \tag{4}$$

Les deux valeurs de la fonction qui figure au second membre sont égales entre elles dans les deux cas suivants :

$$y = x^2, \tag{5}$$

$$y = x^3. \tag{6}$$

La ligne critique (5) ne peut pas traverser le chemin de Lagrange, car, en posant $y = x^2 - \delta^2$, la valeur de y' tirée de l'équation (4) est imaginaire. En ce qui concerne la ligne critique (6), elle traverse tout

chemin de Lagrange, car, en posant $y = x^3 \pm \delta^2$, la valeur de y' tirée de l'équation (4) est réelle (¹).

VII. — Points conjugués.

Prenons de nouveau l'intégrale la plus simple

$$(1) \qquad \int f(x, y, y')\, \partial x.$$

Tout ce que nous allons démontrer pourra s'appliquer au cas le plus général. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que le maximum et le minimum de l'intégrale (1) restaient douteux lorsque la ligne critique, tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne traverse pas ce chemin. Cette circonstance a pu se produire par suite du choix spécial de l'intégrale intermédiaire. En effet, l'intégrale intermédiaire est susceptible de formes diverses. Voyons quelle forme il faut donner à l'intégrale intermédiaire pour que la question de l'existence du maximum et du minimum puisse être résolue sans le moindre doute.

Supposons que nous sachions trouver l'intégrale complète de l'équation différentielle de Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Déterminons les constantes d'intégration de telle façon que la ligne représentée par l'intégrale passe par le point initial (x_0, y_0) du chemin de Lagrange considéré. Après cela, l'équation contiendra encore une constante arbitraire

$$(2) \qquad y = \varphi(x, a).$$

En substituant la valeur de a tirée de cette équation dans l'équation

$$y' = \varphi'(x, a),$$

(¹) Si, bien entendu, x est plus grand que l'unité; dans le cas contraire, la ligne critique (3) n'a pas de point commun avec le chemin de Lagrange.

nous obtiendrons l'intégrale

$$(3) \qquad y' = p(x, y)$$

sous la forme qui permet de résoudre les cas douteux indiqués dans le paragraphe VI.

Nous n'examinerons que le premier de ces cas.

Remarquons tout d'abord que l'équation (2) représente le système des chemins de Lagrange passant par le point donné (x_0, y_0).

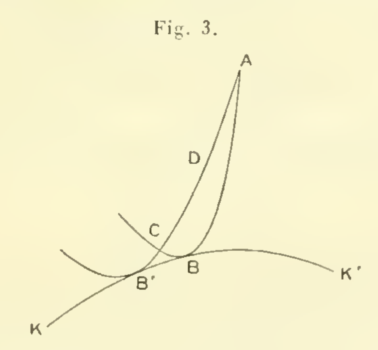
Supposons que la fonction (3) ait une ligne critique, dont l'équation est

$$(4) \qquad y = \psi(x).$$

Il est convenu d'appeler *point conjugué d'un point initial* (x_0, y_0) le point commun à la ligne critique (4) et au chemin de Lagrange. Nous avons à résoudre la question de l'existence du maximum et du minimum au delà du point conjugué.

Au paragraphe VI nous avons montré que le cas est douteux lorsque la ligne critique (4), tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne traverse pas ce chemin. Ce cas douteux est résolu ici dans ce sens qu'*au delà d'un tel point conjugué, il n'existe ni maximum, ni minimum*. En effet, menons par le point donné A deux

Fig. 3.



chemins de Lagrange infiniment voisins l'un de l'autre; ces deux chemins se couperont nécessairement en un autre point C (*fig.* 3).

Supposons que la fonction de Weierstrass soit positive. Étant donné que le chemin ADC ne contient pas de point critique, l'inté-

grale (1) prise le long de ce chemin est minima, cette intégrale est donc plus petite que celle prise le long du chemin de Lagrange ABC infiniment voisin du chemin de Lagrange ADC. Il s'ensuit que l'intégrale (1) prise le long du chemin ABC n'est pas minimum bien que la fonction de Weierstrass soit positive. C. Q. F. D.

Faisons ici quelques remarques au sujet de la ligne critique (4).

Il peut arriver que la ligne critique (4) soit une intégrale de l'équation différentielle (3). Dans ce cas, la ligne critique (4) est l'enveloppe des chemins de Lagrange issus du point (x_0, y_0). C'est ce dernier cas qui est étudié ordinairement dans les Traités du calcul des variations. Mais il peut y avoir d'autres cas.

Il peut arriver que la ligne critique (4) ne soit pas une intégrale de l'équation différentielle (3). Dans ce cas, la ligne critique (4) ne sera plus l'enveloppe des chemins de Lagrange, mais elle contiendra ou les points de contact des chemins de Lagrange issus d'un même point (x_0, y_0), ou bien les points multiples des chemins de Lagrange à branches tangentes.

VIII. — Cas où deux points ne déterminent pas complètement le chemin de Lagrange.

Reprenons l'étude de l'intégrale la plus simple

$$\int f(x, y, y')\,\partial x. \tag{1}$$

L'équation différentielle de Lagrange est

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right). \tag{2}$$

Déterminons l'intégrale complète de telle façon que la courbe passe par le point initial (x_0, y_0) du chemin de Lagrange. Soit

$$y = \varphi(x, a) \tag{3}$$

cette intégrale. Nous avons donc l'identité

$$y_0 = \varphi(x_0, a). \tag{4}$$

En portant dans l'équation

$$y' = \varphi'(x, a)$$

la valeur de a tirée de l'équation (3), nous obtiendrons l'intégrale intermédiaire

(5) $$y' = p(x, y),$$

qui nous permettra de résoudre les cas douteux indiqués dans le paragraphe VI. Le premier de ces cas douteux est déjà résolu; occupons-nous maintenant du second.

Montrons tout d'abord que l'intégrale intermédiaire (5) devient indéterminée au point initial (x_0, y_0). En effet, l'équation (5) donne la direction de la tangente en un point quelconque du chemin de Lagrange (3); mais, au point (x_0, y_0), tous les chemins de Lagrange représentés par l'équation (3) se rencontrent sous des angles différents. Il s'ensuit que $p(x_0, y_0)$ devient indéterminée; (x_0, y_0) est donc un point d'indétermination de la fonction $p(x, y)$.

Supposons qu'il existe un autre point (x_1, y_1) par lequel passent tous les chemins de Lagrange représentés par l'équation (3); nous aurons donc l'identité

(6) $$y_1 = \varphi(x_1, a).$$

Ce point doit être un point d'indétermination de la fonction $p(x, y)$. Ainsi, il existe deux points, (x_0, y_0) et (x_1, y_1), qui ne déterminent pas complètement le chemin de Lagrange. Appelons ces points : *points opposés* (¹).

Deux points sont dits opposés *si les équations du chemin de Lagrange passant par ces points contiennent une constante arbitraire.*

Montrons maintenant que *l'intégrale* (1) *prise le long du chemin de Lagrange entre deux points opposés ne dépend pas de la con-*

(¹) Dans la recherche du chemin le plus court sur la surface d'une sphère, ces points sont réellement diamétralement opposés.

stante arbitraire figurant dans l'équation du chemin de Lagrange (3).

Posons

$$(7) \qquad V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, \partial x.$$

En substituant à y sa valeur (3), l'intégrale (7) devient une fonction de a. Prenons la dérivée par rapport à a :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi'}{\partial a} \right) \partial x.$$

En vertu de l'équation de Lagrange (2), nous pouvons remplacer $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$; en outre, $\frac{\partial \varphi'}{\partial a}$ peut être remplacé par $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)$. Après ces substitutions, l'expression sous le signe $\int$ se transforme en une différentielle exacte :

$$\frac{dV}{da} = \int_{x_0}^{x_1} d\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right).$$

Nous en déduisons

$$\frac{dV}{da} = \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{x=x_1} - \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{x=x_0}.$$

Le second membre est, en vertu des identités (4) et (6), égal à zéro. Donc

$$\frac{dV}{da} = 0.$$

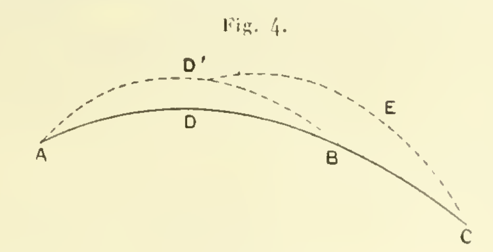
Par conséquent, l'intégrale (7) ne dépend pas de a.

Il résulte de ce théorème qu'au delà d'un point opposé, l'intégrale (1) n'est pas minima même dans le cas où la fonction de Weierstrass est positive.

Soient, en effet, A et B deux points opposés situés sur le chemin de Lagrange AC (*fig.* 4). Entre ces deux points, on peut tracer un chemin de Lagrange AD'B infiniment voisin du chemin donné. En vertu

du théorème que nous venons de démontrer, les valeurs de l'intégrale (1) prise le long des chemins ADB et AD'B sont égales entre elles. D'autre part, le chemin D'BC se compose des branches de deux chemins de Lagrange. On peut donc tracer un chemin de La-

Fig. 4.



grange D'EC infiniment voisin du chemin D'BC. Nous supposons que la fonction de Weierstrass est positive; il s'ensuit que la valeur de l'intégrale (1), prise le long du chemin D'EC, est plus petite que celle de la même intégrale prise le long du chemin D'BC. Il résulte de ce qui précède que la valeur de l'intégrale (1) prise le long du chemin de Lagrange ADBC est plus grande que celle de la même intégrale prise le long du chemin voisin AD'EC. Ainsi se trouve démontré le théorème suivant :

Si le chemin de Lagrange contient deux points opposés, l'intégrale (1) *prise le long d'un tel chemin n'est ni maxima ni minima, même dans le cas où la fonction de Weierstrass est toujours positive ou toujours négative.*

Les résultats établis dans les paragraphes VI, VII et VIII peuvent être aisément étendus au cas le plus général du calcul des variations.

IX. — Détermination du signe de la fonction de Weierstrass.

Montrons en quelques mots à quoi se réduit la recherche du signe de la fonction de Weierstrass.

Commençons par le cas le plus simple :

$$(1) \qquad \int f(x, y, y')\,dx.$$

La fonction de Weierstrass, comme nous l'avons montré dans le paragraphe II, a pour expression

$$(2) \qquad W(x, y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p).$$

Pour un maximum et un minimum faibles, $y' - p$ est une quantité infiniment petite.

Montrons comment on procède dans ce cas, pour déterminer le signe de la fonction (2).

Le signe de cette fonction est le même que celui de l'expression

$$(3) \qquad \frac{2\,W(x, y, y')}{(y' - p)^2}.$$

Pour $y' = p$, cette expression se présente sous une forme indéterminée; sa valeur vraie est

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 f(x, y, p)}{\partial p^2}.$$

Lorsque le point (x, y) situé sur le chemin voisin se rapproche du chemin de Lagrange, p tend vers y' et l'expression (4) vers

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 f(x, y, y')}{\partial y'^2}.$$

Les fonctions (3), (4) et (5) diffèrent entre elles de quantités infiniment petites; le signe de la fonction (5) sera donc le même que celui de la fonction (3). Par conséquent le problème se ramène à la recherche du signe de la fonction (5) en chaque point du chemin de Lagrange.

Si la fonction (5) conserve un signe constant, l'intégrale (1) est, suivant le signe de (5), maxima ou minima.

Il peut arriver que, en un point (ξ, η) du chemin de Lagrange, la fonction (5) devienne égale à zéro ou à ∞; dans ce cas, le signe de la fonction (3) reste inconnu, mais on posera

$$x = \xi + \delta x, \qquad y = \eta + \delta y, \qquad y' = p + \delta p,$$

et l'on examinera le signe de la fonction (2) pour des valeurs infiniment petites de δx, δy, δp. On ne peut pas donner de règle générale pour cette analyse.

Pour le maximum et le minimum forts, $y'-p$ est finie. Dans ce cas, il est impossible d'indiquer de règle générale pour la détermination du signe de la fonction de Weierstrass (2).

Considérons maintenant l'intégrale plus générale

$$\int F(x, y, z, y', z')\,dx. \tag{6}$$

Nous avons montré au paragraphe III que la fonction de Weierstrass a la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} W = F(x, y, z, y', z') &- F(x, y, z, p, q) \\ &- \frac{\partial F}{\partial p}(y'-p) - \frac{\partial F}{\partial q}(z'-q). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Pour le maximum et le minimum faibles, il faut poser

$$y' = p + \delta p, \qquad z' = q + \delta q,$$

où δp et δq sont des quantités infiniment petites. En faisant cette substitution et en ne conservant que les termes de l'ordre le moins élevé, nous aurons

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\delta p^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\delta p\,\delta q + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\delta q^2. \tag{8}$$

Si le point du chemin voisin se rapproche du chemin de Lagrange, p et q tendent vers y' et z', et $2W$ vers

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta p^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial z'}\delta p\,\delta q + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\delta q^2. \tag{9}$$

La différence entre les fonctions (8) et (9) s'exprime par des quantités infiniment petites d'ordres supérieurs au second; ces fonctions sont donc du même signe. Il reste à examiner le signe de l'expression (9) en chaque point du chemin de Lagrange pour des valeurs arbitraires de δp et de δq.

Si l'expression (9) conserve un signe constant, l'intégrale (6) est, suivant le signe de (9), maxima ou minima.

Il peut arriver que l'expression (9), tout en conservant un signe constant, s'annule en un point (ξ, η, ζ) du chemin de Lagrange pour des valeurs particulières de δp et de δq. Dans ce cas, le signe de la fonction de Weierstrass (7) reste inconnu. Ce signe reste également inconnu lorsqu'en un point quelconque (ξ, η, ζ) du chemin de Lagrange, l'expression (9) devient infinie. Dans ce cas, il faut poser $x = \xi + \delta x$, $y = \eta + \delta y$, $z = \zeta + \delta z$, $y' = p + \delta p$, $z' = q + \delta q$, et examiner le signe de la fonction (7) pour des valeurs infiniment petites de δx, δy, δz, δp, δq. Il est impossible d'indiquer des règles générales pour une pareille recherche. Il est également impossible de donner des règles générales pour la recherche du maximum et du minimum forts.

Supposons maintenant que les fonctions inconnues soient liées par l'équation de condition

$$(10) \qquad \varphi(x, y, z, y', z') = 0.$$

Il a été démontré, dans le paragraphe V, que la fonction de Weierstrass était dans ce cas :

$$W = \Phi(x, y, z, y', z') - \Phi(x, y, z, p, q) - \frac{\partial \Phi}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial \Phi}{\partial q}(z' - q),$$

où

$$\Phi = F + \mu\varphi.$$

Il faut tenir compte de ce que les intégrales intermédiaires

$$y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z)$$

doivent satisfaire à l'équation (10). Il est facile de montrer que, dans le cas du maximum et du minimum faibles, le problème se ramène à l'examen du signe de l'expression

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\delta p^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y' \partial z'}\delta p \, \delta q + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}\delta q^2,$$

en chaque point du chemin de Lagrange pour celles des valeurs de δp

et de δq qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta p + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\delta q = 0.$$

Les règles permettant de déterminer le signe de la fonction de Weierstrass dans les cas considérés dans ce paragraphe peuvent être étendues facilement au problème le plus général du calcul des variations.

X. — Problème général du calcul des variations.

Montrons comment les résultats obtenus plus haut peuvent être étendus au problème le plus général du calcul des variations.

Il s'agit de trouver le maximum et le minimum de l'intégrale

$$(1) \qquad \int F(x, y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,dx,$$

les variables étant liées par les équations :

$$(2) \qquad \varphi_i(x, y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le nombre de ces relations doit être inférieur à celui des variables, $m < n$.

Nous admettons qu'il est impossible d'éliminer des équations (2) toutes les dérivées $y'_1, \ldots, y'_n$; sans cela quelques-unes d'entre les variables pourraient être exprimées en fonctions des autres et le nombre des variables serait réduit.

Nous supposons également que l'intégrale (1) soit prise entre des points donnés, c'est-à-dire que $y_1, \ldots, y_n$ prennent des valeurs données pour chacune des limites.

Dans le calcul des variations, ce problème est résolu de la façon suivante : Posons

$$\Phi = F + \mu_1\varphi_1 + \ldots + \mu_m\varphi_m,$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sont des fonctions inconnues auxiliaires. Les fonctions $y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ peuvent être déterminées à l'aide des équa-

tions (2) et des équations suivantes de Lagrange :

$$(3)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i'}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il a été montré dans le paragraphe III que l'intégration des équations différentielles de Lagrange peut être ramenée à celle d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Nous allons donner ici une démonstration plus simple de ce même théorème.

Posons

$$(4)\qquad \Phi = \frac{\partial v}{\partial x} + y_1' \frac{\partial v}{\partial y_1} + \ldots + y_n' \frac{\partial v}{\partial y_n},$$

$$(5)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_i'} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où v est une certaine fonction inconnue auxiliaire.

En éliminant $y_1', \ldots, y_n', \mu_1, \ldots, \mu_m$ de ces équations et des équations (2), nous obtenons une équation aux dérivées partielles :

$$(6)\qquad \Theta\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Soit

$$(7)\qquad v = v(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) + c$$

une intégrale complète de cette équation.

En substituant la valeur trouvée de la fonction v dans les équations (4), (5) et (2), ces équations admettront une solution de la forme :

$$(8)\qquad y_i' = p_i(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$(9)\qquad \mu_i = \mu_i(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il nous faut démontrer maintenant que les équations (8) et (9) sont des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange (2) et (3). Il faut établir, à cet effet, que les intégrales des équations différentielles (8) jointes aux équations (9) sont des intégrales complètes des équations (2) et (3).

En substituant à $y'_1, \ldots, y'_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ leurs valeurs (8) et (9) dans les équations (2), (4) et (5), ces dernières deviennent des identités. Prenons alors les dérivées des deux membres de l'équation (4) par rapport à la variable y_i; nous aurons

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_k}\frac{\partial\mu_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\Phi}{\partial y'_k}\frac{\partial y'_k}{\partial y_i} \\ &\quad = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=n} y'_k \frac{\partial^2 v}{\partial y_k\,\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y'_k}{\partial y_i}. \end{aligned} \right.$$

La première $\sum$ du premier membre de cette équation disparaît, car, en vertu des équations (2),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_k} = \varphi_k = 0.$$

En outre, les dernières $\sum$ des deux membres de l'équation (10) se détruisent en vertu des équations (5). Nous avons donc définitivement

$$(11)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_i} + y'_1\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\,\partial y_i} + \ldots + y'_n\frac{\partial^2 v}{\partial y_n\,\partial y_i}.$$

Supposons maintenant que nous ayons trouvé les intégrales complètes des équations différentielles (8) et que nous ayons substitué dans les équations (2), (4) et (5) les valeurs trouvées de $y_1, \ldots, y_n$, ainsi que celles de $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tirées des formules (9). Ces équations se transforment alors en identités.

Dans cette hypothèse, prenons les dérivées totales par rapport à x de chacune des équations (5). Nous obtenons ainsi

$$(12)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'_i}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_i} + y'_1\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\,\partial y_i} + \ldots + y'_n\frac{\partial^2 v}{\partial y_n\,\partial y_i}.$$

En comparant les équations (11) et (12), nous trouvons

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'_i}\right).$$

Cela prouve que les équations (8) et (9) sont des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange (2) et (3).

Nous allons établir maintenant une propriété plus remarquable encore de l'équation aux dérivées partielles (6). Cette propriété peut être énoncée ainsi :

Les intégrales complètes des équations différentielles de Lagrange (2) et (3) *peuvent être trouvées à l'aide de simples différenciations si l'on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles* (6).

En substituant à $y'_1, \ldots, y'_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ leurs valeurs (8) et (9), dans les équations (2), (4) et (5), ces dernières se transforment ne identités.

Prenons, dans cette hypothèse, les dérivées par rapport à a_i de chacun des membres de l'équation (4). Nous trouvons ainsi :

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_s} \frac{\partial \mu_k}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_k} \frac{\partial y'_k}{\partial a_i}$$
$$= \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{k=n} y'_k \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial y'_k}{\partial a_i}.$$

La première $\sum$ du premier membre de l'équation s'annule pour la raison indiquée plus haut; les deux dernières $\sum$ des deux membres de l'équation se détruisent en vertu des équations (5). Nous trouvons en définitive :

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial a_i} + y'_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \, \partial a_i} + \ldots + y'_n \frac{\partial^2 v}{\partial y_n \, \partial a_i}.$$

En multipliant par ∂x, les deux membres deviennent des différentielles exactes. En intégrant, il vient :

$$(13) \qquad b_i = \frac{\partial v}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Telles sont les expressions des intégrales complètes des équations différentielles de Lagrange (2) et (3).

Pour la recherche du maximum et du minimum, il nous faut des intégrales qui soient vérifiées par les coordonnées du point initial du chemin de Lagrange. Pour trouver de telles intégrales, on posera, dans les équations (13),

$$b_i = \frac{\partial v_0}{\partial a_i},$$

où v_0 est la valeur de la fonction v (7) au point initial :

$$v_0 = v(x_0, y_{1_0}, \ldots, y_{n_0}, a_1, \ldots, a_n) + c.$$

Les intégrales cherchées seront

(14) $$\frac{\partial v}{\partial a_i} = \frac{\partial v_0}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En tirant $a_1, \ldots, a_n$ des équations (14) et en substituant leurs valeurs dans les équations (8) et (9), nous obtiendrons les intégrales intermédiaires qu'il s'agissait de trouver :

(15) $$y'_i = q_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(16) $$\mu_i = \mu_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Considérons maintenant les points critiques des fonctions (15) et (16). Le point critique des fonctions (15) et (16) est dit *point conjugué du point initial.*

Les points critiques des fonctions (15) et (16) sont situés sur une certaine surface (dans l'espace à plusieurs dimensions) :

(17) $$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Il faut examiner la position du chemin de Lagrange par rapport à la surface critique (17). Nous considérerons le cas général où la fonction qui figure au premier membre de l'équation (17) change de signe en passant par zéro. Il faut alors poser

(18) $$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = \pm \delta^2,$$

où δ est une quantité infiniment petite.

Examinons maintenant les fonctions (15) et (16) pour celles des valeurs des variables qui satisfont à l'équation (18). Si les fonctions (15) et (16) sont réelles pour les deux valeurs de δ^2, le critérium fondamental s'applique malgré la présence du point critique, comme nous l'avons montré dans le paragraphe VI; dans ce cas, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Si, par contre, les fonctions (15) et (16) sont imaginaires pour l'une des valeurs de δ^2 dans (18), il n'existe, au delà d'un tel point critique, ni maximum, ni minimum, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant comme nous l'avons montré au paragraphe VII.

Les fonctions (15) prennent au point initial du chemin de Lagrange des valeurs indéterminées. Si le chemin de Lagrange, outre son point initial, contient encore un point d'indétermination de l'une des fonctions (15) et (16), il n'existe, au delà d'un tel point, ni maximum, ni minimum, même dans le cas où la fonction de Weierstrass ne change pas de signe. Cette propriété a été démontrée dans le paragraphe VIII.

La fonction de Weierstrass a la forme suivante :

$$W = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) - \Phi(x, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}(y'_k - q_k).$$

Examinons le signe de cette fonction pour celles des valeurs des variables qui satisfont aux équations (2).

Pour le maximum et le minimum faibles, le problème, consistant à déterminer le signe de la fonction de Weierstrass, peut être ramené à la recherche du signe de l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_i \, \partial y'_k} \delta q_i \, \delta q_k \tag{19}$$

en chacun des points du chemin de Lagrange pour celles des valeurs de $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ qui satisfont aux équations

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_1} \delta q_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_n} \delta q_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que le maximum et le minimum puissent exister, l'expression (19) doit conserver un signe constant.

Remarque.

Dans les paragraphes VII et VIII, nous avons indiqué deux cas où le maximum et le minimum font défaut, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant.

Dans ces cas, le chemin de Lagrange est traversé par les chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial. Lorsqu'il existe un maximum ou un minimum, le chemin de Lagrange n'est pas traversé par les chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Si un chemin de Lagrange n'est pas traversé par des chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial, le maximum et le minimum relatifs à ce chemin dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Si un chemin de Lagrange est traversé par un autre chemin de Lagrange infiniment voisin du premier et passant par le point initial, il n'y aura ni maximum, ni minimum, même dans le cas où la fonction de Weierstrass conserve un signe constant [1].

Ainsi, le problème peut être ramené à la recherche du point d'intersection de chemins de Lagrange infiniment voisins. Mais cette recherche est aussi compliquée, sinon plus, que la recherche des points critiques indiquée plus haut. Montrons par un exemple, choisi parmi les plus simples, comment peut se faire la recherche du point d'intersection de deux chemins de Lagrange infiniment voisins.

---

[1] Ce théorème paraît être contredit par la figure 3 (p. 121). Au chemin de Lagrange ADC peut correspondre un maximum ou un minimum, quoique ce chemin soit traversé par le chemin infiniment voisin ABC. Cette contradiction apparente disparaît si, par point d'intersection, nous entendons la position limite de ce point qui se trouve en B' sur le prolongement du chemin ADC.

Supposons que l'équation du chemin de Lagrange passant par le point donné soit

$$(1) \qquad \varphi(x, y, a) = 0.$$

Admettons que la fonction figurant au premier membre de cette équation soit holomorphe par rapport aux trois variables x, y, a. L'équation d'une courbe infiniment voisine sera alors

$$\varphi(x, y, a + \delta a) = 0.$$

La position limite des points d'intersection est déterminée, comme on le sait, par les équations

$$\varphi(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

Supposons que ces équations aient une solution réelle $x = x_1$, $y = y_1$. Il ne s'ensuit nullement que les deux courbes infiniment voisines se coupent réellement. Pour le voir, il est nécessaire de faire une recherche complémentaire.

Posons

$$x = x_1 + \delta x, \qquad y = y_1 + \delta y,$$

où δx et δy sont des quantités infiniment petites. Formons les équations :

$$(2) \quad \varphi(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y, a) = 0, \qquad \varphi(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y_1, a + \delta a).$$

Si ces équations ont des solutions réelles par rapport à δx et δy, les courbes infiniment voisines se coupent réellement. Mais, dans certains cas, les équations (2) n'admettent pas de solutions réelles par rapport à δx et à δy; les courbes infiniment voisines n'ont pas alors de point d'intersection.

Si les expressions

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial a} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial a}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}$$

ne s'annulent pas, lorsque $x = x_1$, $y = y_1$, les équations (2) admettent une solution réelle par rapport à δx et δy. Mais si les deux expressions (3) deviennent égales à zéro, pour $x = x_1$, $y = y_1$ la recherche des solutions réelles des équations (2) devient plus compliquée.

Cette recherche devient encore plus compliquée lorsque la fonction figurant au premier membre de l'équation (1) n'est pas holomorphe.

Sur les fonctions représentables analytiquement;

PAR M. H. LEBESGUE.

I. — Introduction.

Bien que, depuis Dirichlet et Riemann, on s'accorde généralement à dire qu'il y a fonction quand il y a correspondance entre un nombre y et des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sans se préoccuper du procédé qui sert à établir cette correspondance, beaucoup de mathématiciens semblent ne considérer comme de vraies fonctions que celles qui sont établies par des correspondances analytiques. On peut penser qu'on introduit peut-être ainsi une restriction assez arbitraire; cependant il est certain que cela ne restreint pas pratiquement le champ des applications, parce que, seules, les fonctions représentables analytiquement sont effectivement employées jusqu'à présent.

Dans certaines théories générales, dans la théorie de l'intégration au sens de Riemann, par exemple, on ne se préoccupe pas de savoir si les fonctions que l'on considère sont ou non représentables analytiquement. Mais cela ne veut pas dire qu'elles ne le sont pas toutes [1] et, dans tous les cas, quand on applique effectivement ces théories, c'est toujours sur des fonctions représentables analytiquement qu'on opère.

---

[1] On verra cependant, à la fin du paragraphe VIII, que l'intégration au sens de Riemann s'applique à des fonctions non représentables analytiquement.

On peut dire plus : quand on emploie les expressions analytiques que M. Baire a considérées dans sa Thèse [*Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1900)], on reconnaît facilement que toutes les fonctions qui ont été citées jusqu'ici, qu'elles se soient présentées naturellement ou qu'elles aient été construites de toutes pièces pour fournir des exemples de singularités, sont toutes représentables analytiquement. Ce résultat, surprenant au premier abord, étonnera moins si l'on se rappelle que la fonction $\chi(x)$, si souvent citée comme exemple de singularités, égale à un pour x rationnel, à zéro pour x irrationnel, admet la représentation analytique suivante :

$$\chi(x) = \lim_{m=\infty}\left[\lim_{n=\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}\right].$$

Ainsi il n'est pas évident qu'il existe des fonctions non représentables analytiquement; il y a donc lieu de rechercher s'il existe de telles fonctions et, s'il en existe, il y a lieu de rechercher des propriétés communes à toutes les fonctions représentables analytiquement. Non seulement parce que ces propriétés permettront peut-être de reconnaître si certaines fonctions sont ou non représentables analytiquement, mais surtout parce qu'il faut pouvoir supposer que toutes les fonctions sur lesquelles on raisonne possèdent certaines propriétés particulières, appartenant à toutes les fonctions représentables analytiquement sans appartenir à toutes les fonctions, pour que cela ait un sens de dire qu'on se restreint à la considération des fonctions représentables analytiquement [1].

---

[1]. On verra que, pour qu'une propriété appartienne à toutes les fonctions représentables analytiquement, il suffit qu'elle appartienne aux polynomes et qu'elle soit vraie de la somme et du produit de deux fonctions, et de la limite d'une suite de fonctions, dès qu'elle est vraie de chacune d'elles. J'ai donné (*Comptes rendus*, 29 avril 1902) et dans ma Thèse [*Intégrale, longueur, aire* (*Annali di Matematica*, 1902)] une telle propriété, d'où j'ai déduit une autre propriété de même nature (*Comptes rendus*, 28 décembre 1903), sur laquelle je ne reviendrai pas dans ce Mémoire, et que M. Borel avait obtenue de son côté (*Comptes rendus*, 7 décembre 1903).

M. Baire (*Comptes rendus*, 11 décembre 1899) avait énoncé le premier une

La recherche de conditions nécessaires pour qu'une fonction soit représentable analytiquement d'une manière particulière a été l'occasion de nombreux travaux. Je ne citerai que deux résultats dus à Dirichlet et Weierstrass :

Toute fonction continue n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima est représentable par la série de Fourier;

Toute fonction continue est représentable par une série uniformément convergente de polynomes.

Donc, tandis que l'on aurait pu craindre ne pouvoir exprimer que par des relations analytiques compliquées des conditions nécessaires pour qu'il y ait une représentation analytique, il suffit que certaines conditions très simples relatives à la variation soient remplies pour qu'il en soit ainsi. C'est encore un fait du même genre qu'a mis en évidence M. Baire en faisant connaître à quelles conditions doit satisfaire une fonction pour être la somme d'une série de polynomes (*voir* plus loin, théorème XV). M. Baire a fait connaître de plus, dans sa Thèse, une importante classification des fonctions qui permet d'aborder la recherche de propriétés caractéristiques des fonctions admettant une représentation analytique quelconque ([1]).

Dans cette étude j'ai employé des raisonnements simples qui m'avaient déjà permis de retrouver et de compléter certains des résultats de M. Baire ([2]); j'ai surtout précisé une remarque, déjà citée en note, faite dans ma Thèse, page 27; cela m'a conduit à étudier la nature de l'ensemble des points pour lesquels une fonction f satisfait à l'inégalité $a \leqq f \leqq b$. J'ai obtenu des conditions caractéristiques pour que des fonctions soient de chacune des classes que considère M. Baire (théorèmes IV, VII, XVII) ou pour qu'une fonction admette une représentation analytique (théorème VI).

---

propriété appartenant à toutes les fonctions représentables analytiquement. Mais on ne sait pas si toutes ces propriétés n'appartiennent pas à toutes les fonctions. C'est en modifiant convenablement la première propriété citée que j'ai obtenu une propriété caractéristique des fonctions représentables analytiquement.

([1]) Outre ce qui se trouve dans sa Thèse, M. Baire a publié deux Notes à ce sujet (*Comptes rendus*, 4 et 11 décembre 1899).

([2]) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1898 et *Comptes rendus*, 27 mars 1899.

Comme application de cette dernière condition, j'ai distingué dans l'ensemble des fonctions déterminées analytiquement celles qui le sont explicitement ($y =$ expression analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_n$) et celles qui le sont implicitement (expression analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y = 0$). On ne distingue pas ordinairement entre ces deux catégories de fonctions, parce que, dans la pratique, le procédé même qui prouve l'existence d'une fonction implicite en fournit un développement; mais l'identité de ces deux familles de fonctions n'est pas évidente. Elle résulte du théorème VI (théorème XVIII).

Enfin (§ VIII), j'ai cité des exemples de fonctions de toutes les classes et de fonctions échappant à tout mode de représentation analytique.

Dans le paragraphe suivant je donnerai quelques définitions indispensables et la classification de M. Baire. Avant cela je veux dire pourquoi l'emploi, fait dans cette classification, des nombres transfinis ne soulève, à mon avis, aucune difficulté.

Si l'on étudie la croissance des fonctions et si, ayant caractérisé la croissance de x^n par n, on constate que e^x croît plus vite que x^n, on pourra éprouver le désir de caractériser cette nouvelle croissance par un nouveau symbole, ω [1]. Nul n'y verra d'inconvénients. Si l'on dit que ω est un nombre transfini et est plus grand que n, on pourra trouver que c'est là un langage bien mal choisi, mauvais pratiquement, mais on ne pourra le déclarer mauvais logiquement. L'emploi que l'on fait, dans la classification de M. Baire, des nombres transfinis est analogue à celui que je viens de rappeler. Les nombres transfinis y sont des signes, des *symboles de classe* permettant de distinguer ces diverses classes.

D'ailleurs, la classification de M. Baire, dont toutes les classes existent effectivement comme on le verra au paragraphe VIII, peut, comme la théorie de la croissance des fonctions [2], ou comme la théorie des ensembles dérivés, fournir une base solide pour construire

---

[1] *Voir* Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1898, Note II.

[2] Et même plus simplement à cause de l'indétermination des échelles de types de croissance.

la théorie des nombres transfinis. Sans développer tous les raisonnements nécessaires, c'est ce point de vue que j'ai adopté; en d'autres termes je n'ai jamais emprunté une proposition à la théorie abstraite des nombres transfinis, j'ai toujours indiqué rapidement comment l'on démontrerait cette propriété pour l'ensemble des symboles de classe.

Si cet emploi déguisé des nombres transfinis était encore gênant pour quelque lecteur, celui-ci devrait remarquer que les nombres transfinis n'interviennent jamais dans les raisonnements [1], seulement les propriétés ne seraient démontrées que pour les classes de fonctions dont les symboles de classe sont des entiers, puisque le lecteur se refuserait à considérer les autres; j'ajoute que ce refus serait, à mon avis, tout à fait injustifié, logiquement du moins.

II. — Définitions.

Intervalle. Domaine. — Je vais m'occuper de fonctions d'un nombre quelconque, fini, de variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces fonctions seront définies pour certains systèmes de valeurs des variables, c'est-à-dire, en adoptant un langage souvent employé, pour certains points de l'espace à n dimensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je m'occuperai surtout des fonctions définies dans tout un intervalle ou un domaine.

Un *intervalle* est l'ensemble des points satisfaisant aux conditions

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1, \qquad a_2 \leqq x_2 \leqq b_2, \qquad \ldots, \qquad a_n \leqq x_n \leqq b_n.$$

Une transformation de la forme

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad X_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \ldots,$$
$$X_n = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où les X_i sont des fonctions continues, fait correspondre à tout point

(1) Les nombres transfinis interviennent au contraire dans les raisonnements de M. Baire; cependant, à mon avis, comme je le dirai plus loin, la méthode de M. Baire a certains avantages que ne possède pas celle du texte.

m de l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point M de l'espace $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; si à tout point M correspond au plus un point m, par définition, cette transformation fera correspondre un *domaine* à un intervalle.

Un intervalle sera fini si tous les a_i et b_i sont finis, les domaines correspondant à ces intervalles sont aussi dits *finis*. Un intervalle est dégénéré si, pour certaines valeurs de i, a_i est égal à b_i; aux intervalles dégénérés correspondent les domaines dégénérés.

Je ne raisonnerai, en général, que sur les domaines finis non dégénérés; la plupart des propositions obtenues sont cependant vraies pour tous les domaines. Pour s'en assurer, ou pour voir comment on doit les modifier, il suffira de remarquer qu'un domaine infini est la réunion d'une infinité dénombrable de domaines finis, qu'un domaine dégénéré est la partie commune à une infinité de domaines non dégénérés.

Les 2^n points d'un intervalle dont, quel que soit i, la coordonnée x_i est égale à a_i ou b_i sont les sommets de l'intervalle. Les points pour lesquels l'une au moins des coordonnées x_i a l'une de ses valeurs limites a_i ou b_i constituent la *frontière* de l'intervalle. A la frontière d'un intervalle correspond la frontière d'un domaine. Quand un point appartient à un domaine je dirai qu'il est *contenu dans ce domaine;* si, de plus, il ne fait pas partie de la frontière du domaine, je dirai qu'il est *contenu à l'intérieur du domaine* ([1]).

Dans la suite, je supposerai toujours qu'un domaine D non dégénéré a été choisi et je ne m'occuperai que des points de ce domaine. C'est ainsi que, lorsque je dirai qu'une fonction f est partout définie, cela voudra dire qu'elle est définie pour tous les points de D, mais f ne sera pas nécessairement partout définie dans l'espace. Lorsque je dirai

---

([1]) J'adopte les définitions du texte pour éviter les difficultés qu'on rencontre dans la démonstration des propriétés des domaines quand on définit ceux-ci par la considération des variétés fermées à $n-1$ dimensions.

Pour que les définitions du texte soient acceptables, il faut démontrer que la frontière d'un domaine ne dépend pas de la manière dont on l'a déduite d'un intervalle; on y arrivera en prouvant que la définition du texte rentre comme cas particulier dans la définition classique : un point M est point frontière d'un ensemble E si tout intervalle contenant M à son intérieur contient à la fois des points de E et des points n'appartenant pas à E; la frontière de E est l'ensemble de ses points frontières (JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I).

qu'une expression e représente une fonction f cela voudra dire que, pour les points de D où e a un sens, f est définie et égale à e; que, pour les points de D où e n'a pas de sens, f n'est pas définie; mais il se pourrait que, en certains points n'appartenant pas à D, e ait un sens sans que f soit définie ou inversement, ou encore que e ait une valeur différente de f [1]. Quant au domaine D ce sera un domaine quelconque fini ou infini, ce pourra être tout l'espace.

Expression analytique. Fonctions représentables ou exprimables analytiquement. Fonctions définies ou données analytiquement. — Je dirai qu'*une fonction est représentable ou exprimable analytiquement* lorsqu'on peut la construire en effectuant, suivant une loi donnée, certaines opérations; cette loi de construction constitue une *expression analytique*. Il faut évidemment préciser les opérations que l'on admet; si l'on veut que les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivement égales aux variables, rentrent dans l'ensemble des fonctions représentables analytiquement, ensemble que je désigne avec M. Baire par E; si l'on veut que la somme et le produit de deux fonctions de E appartiennent à E; si l'on veut que la somme d'une série convergente de fonctions de E soit une fonction de E, il faut que *toute fonction que l'on peut construire en effectuant suivant une loi déterminée un nombre fini ou dénombrable d'additions, de multiplications, de passages à la limite, à partir des variables et de constantes, rentre dans l'ensemble des fonctions exprimables analytiquement.*

C'est aux fonctions ainsi définies que je réserverai le nom de *fonctions représentables analytiquement,* mais, pour que les lois de construction considérées puissent conduire à des fonctions non partout définies, je n'exclurai pas celles de ces lois qui conduiraient à

---

[1] La convention faite ici est celle qui est adoptée le plus généralement; on peut même dire que c'est celle qui est toujours adoptée pour les fonctions définies en tous les points de D. Pour les fonctions f définies seulement en certains points de D on fait parfois la convention qu'une expression e représente f pourvu que, en tous les points de D où f est définie, e ait un sens et soit égale à f; on ne se préoccupe pas de la valeur de e aux points de D où f n'est pas définie. Il importe de ne pas confondre cette convention avec celle du texte.

prendre la limite d'une suite

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

qui ne serait pas convergente pour tous les points où tous les u_i ont un sens. Bien entendu la limite des u_i n'existe que si la suite est convergente, mais cette suite n'est pas supposée convergente partout où les u_i existent tous.

Les expressions analytiques considérées ordinairement contiennent d'autres signes que ceux qui ont été employés; on y rencontre par exemple les signes $-$, $:$, $\sqrt[m]{\ }$, sin, log, etc. Il est facile de voir qu'en adjoignant les opérations correspondantes à celles qui ont été employées, on n'élargit pas l'ensemble des fonctions représentables analytiquement. Par exemple, on peut remplacer $u - v$ par $u + v.(-1)$; $\frac{u}{v}$ peut être remplacé par $u \times \frac{1}{v}$ et l'on peut nommer une série de polynomes en v convergente, sauf pour $v = 0$, et représentant $\frac{1}{v}$; par suite la division est remplacée par des additions, des multiplications et un passage à la limite. Une démonstration analogue peut être faite pour chacun des autres signes, car ce sont tous des symboles représentant des fonctions définies dans certains domaines et continues dans les domaines où elles sont définies; de telles fonctions peuvent toujours être représentées par des séries de polynomes [1].

On emploie aussi quelquefois des symboles d'intégration et de dérivation; l'intégration et la dérivation ne font pas correspondre un nombre à un ensemble fini de nombres donnés, mais une fonction à une fonction donnée; il est donc nécessaire de les étudier à part et il serait nécessaire de même d'étudier toutes les autres opérations fonctionnelles que l'on conviendrait d'employer. Je ne ferai pas cette étude; je me contenterai d'affirmer que, même si l'on donne à l'intégrale le sens que j'ai adopté dans ma Thèse, l'intégration d'une fonction représentable analytiquement donne une fonction de même nature et que la dérivation, même si on l'applique à une fonction non partout

[1] Souvent même elles sont définies par de telles séries, mais il arrive parfois que les séries de définition ne les représentent que dans certains domaines.

dérivable et non partout continue, même si on la remplace par la dérivation supérieure ou inférieure, à droite ou à gauche, de Dini, conduit à une fonction exprimable analytiquement si elle est appliquée à une fonction de même nature. D'ailleurs, dans les expressions analytiques ordinairement employées, l'intégration et la dérivation conduisent à des fonctions continues et alors toute démonstration est inutile ([1]).

Une loi de construction constituera une expression analytique si elle n'emploie qu'un nombre fini ou dénombrable d'opérations définies par des symboles de fonctions exprimables analytiquement et un nombre fini ou dénombrable de passages à la limite; ces opérations devant être effectuées à partir de constantes et de fonctions exprimables analytiquement données. Il est évident, d'après la définition même, qu'une expression analytique peut toujours être remplacée par une expression équivalente et n'employant que des additions, des multiplications et des passages à la limite effectués à partir des variables et de constantes.

Une fonction $y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *sera dite déterminée, donnée ou définie analytiquement,* si elle est définie en même temps qu'un nombre fini ([2]) de fonctions $y_2, \ldots, y_p$, comme l'une des solutions d'un système de p équations obtenues en égalant à *zéro* des fonctions exprimables analytiquement de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Classification des fonctions. — M. Baire considère les expressions analytiques dans lesquelles les signes $+$ et $\times$ ne sont appliqués qu'à des constantes et aux variables. Ces expressions représentent donc les

---

([1]) On pourrait croire que toute démonstration est toujours inutile pour l'intégration; il n'en est rien. Le symbole $\int_0^x f(x, y)\, dx$ donne bien, quand il a un sens pour $x = X$, une fonction continue en x entre o et X, mais nous ne savons pas pour quel ensemble de valeurs (x, y) il a un sens, ni comment varie sa valeur quand y varie.

Les affirmations du texte se légitiment facilement si l'on emploie les propriétés des ensembles et des fonctions mesurables B qui sont démontrées plus loin.

([2]) On pourrait, comme je le dirai plus loin, supposer que les y forment une infinité dénombrable.

fonctions qui se déduisent des polynomes par des passages répétés à la limite [1].

M. Baire appelle *fonctions de classe zéro* les fonctions partout définies qui sont continues par rapport à l'ensemble des variables. Les fonctions partout définies, discontinues, qui sont limites de fonctions continues, ou, ce qui revient au même, qui sont limites de polynomes, constituent *la classe* 1.

Les fonctions partout définies, qui ne sont pas de classe 1, et qui sont limites de fonctions des classes 0 et 1, forment *la classe* 2.

D'une manière générale, un ensemble $\mathcal{E}$ de classes ayant été défini, la première classe de fonctions venant après cet ensemble de classes sera formée des fonctions partout définies qui n'appartiennent pas à cet ensemble de classes et qui sont limites de fonctions de cet ensemble de classes s'il existe de telles fonctions. Pour distinguer cette classe des précédentes nous créerons un signe α que nous appellerons un *symbole de classe*. La classe définie sera dite *la classe* α. Le symbole α sera dit *plus grand* que les symboles des classes qui font partie de $\mathcal{E}$, je dirai aussi que les classes constituant $\mathcal{E}$ sont *antérieures* ou *inférieures* à la classe α ou encore que les fonctions des classes de $\mathcal{E}$ sont des classes inférieures à α, etc. [2].

Pour noter les premières classes nous emploierons, comme symboles de classes, les nombres entiers successifs; puis, s'il existe effectivement une classe venant après l'ensemble des classes à symboles entiers, nous créerons un symbole représentant cette classe. Le symbole ordinairement adopté est ω. Si, après la classe ω, existe une classe nouvelle, nous la nommerons à l'aide d'un nouveau symbole. La manière d'écrire ces symboles n'est pas donnée, elle importe peu

---

(1) Les passages à la limite que M. Baire considère, ainsi que ceux qui ont été employés précédemment, ne sont pas nécessairement appliqués à des suites convergeant uniformément. En d'autres termes, dire que u est la limite de la suite $u_1, u_2, \ldots$, c'est dire que u est la somme de la série convergente $u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots$; ce n'est pas dire que cette série est uniformément convergente.

(2) Il faudrait démontrer que l'emploi, à la manière ordinaire, des mots *plus grand* et *plus petit, inférieur* et *supérieur, antérieur* et *postérieur*, etc., ne conduira jamais à une contradiction; cela est à peu près évident.

pour la suite. Il nous sera toutefois commode de convenir que, si α est un symbole de classe, par la classe $\alpha + 1$ nous désignerons celle qui suit immédiatement l'ensemble $\mathcal{E}$ formé de la classe α et des classes inférieures. D'ailleurs, si β est le symbole de la classe que nous venons de désigner par $\alpha + 1$, $\beta - 1$ devra être considéré comme équivalent à β.

Il faut remarquer que, si α est un symbole de classe, $\alpha + 1$ s'applique toujours à une classe déterminée ([1]), mais il se peut que $\alpha - 1$ ne s'applique à aucune classe déterminée; c'est le cas de $\alpha = \omega$, par exemple. Lorsque $\alpha - 1$ s'appliquera à une classe déterminée, α sera dit de *première espèce*, sinon il sera dit de *seconde espèce*.

La différence entre les deux espèces de classes est assez grande; nous la rencontrerons constamment dans la suite. La conséquence la plus importante de l'existence de ces deux espèces de classes est qu'il ne suffit pas du raisonnement par récurrence ordinaire pour démontrer une proposition pour toutes les classes. Nous *admettrons* qu'une proposition est démontrée pour toutes les classes, si elle est vérifiée pour la classe 0, et s'il est prouvé qu'elle est vraie de la classe α dès qu'elle est vraie de toutes les classes inférieures à α. Cela ne veut pas dire qu'il suffit de la vérifier pour $\alpha = 0$ et de démontrer que son exactitude pour $\alpha = \beta$ entraîne son exactitude pour $\alpha = \beta + 1$. Il faut, de plus, prouver que, si α est de seconde espèce, la propriété est vraie pour α dès qu'elle est vraie de tous les symboles inférieurs à α. Il arrive très souvent, cependant, quand on donne à un raisonnement la dernière forme indiquée, que l'on néglige de donner explicitement la démonstration relative au cas où α est de seconde espèce parce que ce raisonnement est souvent très simple et qu'on le sous-entend ([2]).

([1]) L'existence effective de toutes les classes logiquement conçues est admise ici, comme dans toute la suite. La démonstration de cette existence pourrait être donnée immédiatement, j'ai pu la présenter sous une forme plus simple en la rejetant à la fin de ce Mémoire, au paragraphe VIII. On verra, dans un instant, quelle est la limitation logique de l'ensemble des classes.

([2]) Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que, tandis que le raisonnement par récurrence ordinaire, applicable à l'ensemble des nombres entiers, fournit un procédé régulier permettant de vérifier la proposition pour un entier quelconque donné à l'aide d'un nombre fini de syllogismes, le raisonnement par ré-

Au point de vue de la représentation des fonctions, la différence entre les deux espèces de classes se manifeste de la manière suivante : Soit f une fonction de classe α limite des fonctions f_1, f_2, ... des classes α_1, α_2, ... inférieures à α. Si α est de première espèce ceux des α_i qui ne sont pas égaux à $\alpha - 1$ sont en nombre fini; de sorte que, en supprimant les fonctions correspondantes, f est définie comme limite de fonctions de classe $\alpha - 1$. Si α est de seconde espèce, nous ne pouvons plus supposer que toutes les f_i sont de même classe, mais nous pouvons supposer qu'elles sont de classes croissantes; car si l'on supprime tous les f_{p+1}, f_{p+2}, ... qui ne sont pas de classes supérieures à α_p, et cela quel que soit p, il restera certainement des fonctions et elles formeront une suite définissant f comme limite. D'ailleurs α est le premier symbole surpassant tous les α_p conservés; donc *tout symbole α peut être déterminé comme le plus petit de ceux qui suivent une suite croissante, finie ou dénombrable, de symboles de classe.* Aux suites finies correspondent les symboles de première espèce, aux suites infinies correspondent ceux de seconde espèce.

La définition des symboles entraîne une conséquence importante : *Les symboles inférieurs à α sont en nombre fini ou dénombrable.* Conservons les notations précédentes; si l'on a $\beta < \alpha$, β est égal ou inférieur à l'un des α_i; par suite, si la propriété est vraie des α_i, elle est vraie de α. Les passages à la limite appliqués à des suites dénombrables ne permettent donc pas de passer de classes dont les symboles jouissent de la propriété indiquée à des classes dont les symboles ne possèdent plus cette propriété. Puisque toutes les classes sont formées par des passages à la limite à partir de suites de fonctions de classe 0, tous les symboles jouissent bien de la propriété indiquée. Cela ne veut pas dire que l'ensemble des classes soit dénombrable, tout au contraire, la définition générale des classes nous permet de concevoir une classe venant après une infinité dénombrable quelconque de classes. *L'ensemble c des classes, conçu logiquement, jouit donc, entre autres propriétés, des suivantes :*

1° *Il n'est pas dénombrable;*

---

currence applicable à l'ensemble des symboles de classe ne fournit rien d'analogue.

2° *Avant une classe quelconque, il n'existe qu'un nombre fini ou dénombrable d'autres classes;*

3° *Après tout ensemble dénombrable de classes, il existe une nouvelle classe.*

Les fonctions des différentes classes de e existent réellement, on le verra au paragraphe VIII : pour le moment les différentes classes de e ne sont que logiquement conçues comme pouvant résulter de la définition générale des classes. Il faut bien comprendre comment il se fait que cette définition ne permet pas de concevoir une classe venant après toutes celles de e; c'est parce que, quelle que soit la suite convergente f_1, f_2, ... de fonctions de e, sa limite fera partie de e puisqu'elle sera au plus de la classe de e qui, d'après 3°, suit immédiatement les classes de f_1, f_2, ...

Ainsi, notre définition contient en elle-même un principe logique de limitation, qui restera le même, quel que soit le procédé de classification que l'on emploie, et quel que soit le contenu de la classe o, pourvu qu'une fonction soit définie par une infinité *dénombrable* de fonctions des classes antérieures (¹).

(¹) La classification donnée par M. Baire fournit une occasion d'utiliser les symboles imaginés par M. Cantor et que l'on appelle *nombres transfinis* de la première classe de nombres transfinis ou de la deuxième classe numérique. Pour utiliser de même les nombres transfinis de la troisième classe numérique il faudrait, d'après ce qui est dit dans le texte, employer un procédé de classification dans lequel une fonction serait définie par une infinité non dénombrable de fonctions des classes antérieures. On peut citer de tels procédés.

J'appelle avec M. Borel (*Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 122) *suite transfinie* une suite de nombres ayant pour indices les symboles de e. On imagine facilement ce qu'on entendra par la limite d'une telle suite. Ceci posé, partons des fonctions étudiées par M. Baire comme classe initiale, et convenons que chaque classe nouvelle sera formée des fonctions limites des suites transfinies de fonctions des classes antérieures. Une telle classification fournirait peut-être l'occasion d'utiliser les nombres transfinis de la deuxième classe de nombres transfinis.

Il est à remarquer que la première des classes ainsi définie, celle qui vient après l'ensemble des fonctions exprimables analytiquement, existe certainement. On verrait, en effet, facilement que les fonctions définies au paragraphe VIII et qui échappent à toute représentation analytique font partie de cette classe. Mais il faut remarquer aussi que cette classe existerait seule, ce qui enlèverait tout

Jusqu'ici, nous ne nous sommes occupés que des fonctions partout définies; il n'y a évidemment aucune difficulté à appliquer la classification de M. Baire à toutes les fonctions. Cependant, pour simplifier, je ne m'occuperai dans la suite, sauf avis contraire, que de la classification des fonctions partout définies. Certains des théorèmes que l'on obtiendra, relatifs aux fonctions d'une classe déterminée, devraient être légèrement modifiés pour s'appliquer aux fonctions non partout définies ([1]).

M. Baire désigne par E l'ensemble des fonctions auxquelles s'applique sa classification; cet ensemble de fonctions ne diffère pas de celui que j'ai appelé plus haut E, c'est-à-dire de l'ensemble des fonctions représentables analytiquement. Cela se démontre facilement pour les fonctions partout définies. Raisonnons sur ces fonctions; les fonctions représentables analytiquement sont formées à l'aide d'additions, de multiplications et de passages à la limite à partir de fonctions de M. Baire. Il suffit donc de démontrer que la limite d'une suite convergente de fonctions de l'ensemble E de M. Baire est une fonction du même ensemble, ce qui est évident par définition même de E, et de démontrer que la somme et le produit de deux fonctions de E sont aussi une fonction de E. Or, soient f et g deux fonctions de l'ensemble E de M. Baire; on peut trouver un symbole de classe α tel que f et g soient au plus de classe α. Alors f et g sont respectivement limites des fonctions f_p et g_p de classes inférieures à α; puisque $f+g$ et fg sont respectivement limites de f_p+g_p et $f_p g_p$, il sera démontré que le produit et la somme de deux fonctions de classe β au plus sont des fonctions de classe β au plus pour $\beta=\alpha$, si cela est démontré pour $\beta<\alpha$.

---

intérêt à la classification, si, comme on l'a prétendu quelquefois, l'ensemble e avait la puissance du continu.

([1]) Pour la simplicité des énoncés il serait d'ailleurs bon de faire rentrer dans la classe o, non seulement les fonctions continues partout définies, mais encore les fonctions définies seulement pour les points d'un ensemble fermé et continues sur cet ensemble. La classe o contiendrait donc, si le domaine D est fini, les séries de polynomes uniformément convergentes dans l'ensemble des points de convergence.

Nous pouvons appliquer le raisonnement par récurrence généralisé, puisque la propriété considérée est vraie pour $\beta = 0$. Donc, le produit et la somme de deux fonctions rentrant dans la classification de M. Baire sont une fonction de même nature. Il y a bien identité, pour les fonctions partout définies, entre les fonctions représentables analytiquement et celles auxquelles s'appliquent la classification de M. Baire.

Cela est moins évident pour les fonctions non partout définies, parce qu'il se peut que $\lim(f_p + g_p)$ ou $\lim f_p g_p$ ait un sens sans que $\lim f_p$ et $\lim g_p$ en aient un. La propriété est cependant vraie, elle sera démontrée incidemment dans la suite (*voir* p. 170).

III. — Opérations effectuées sur des fonctions de classe α.

Par des raisonnements analogues à ceux du paragraphe précédent, on démontrerait que $f + \varphi$, $f - \varphi$, $f\varphi$, $\sqrt[m]{f}$, $\cos f$, ..., sont de classe α au plus, si f et φ sont de classe α au plus. Tous ces résultats se déduisent d'ailleurs du théorème suivant :

I. *Si la fonction* $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ *est de classe* 0, *et si* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ *sont de classe* α *au plus*, $\Phi = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ *est de classe* α *au plus* (¹).

Conformément à nos conventions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont partout définies dans un certain domaine D; quant à φ nous admettons qu'elle est définie dans tout un certain domaine Δ de l'espace $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ contenant l'ensemble des points $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$. Il est alors évidemment possible de prolonger φ en dehors de Δ tout en respectant la continuité, de sorte que l'on pourra raisonner comme si φ était partout définie.

Ceci posé, supposons $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de classe β et supposons-les respectivement limites des fonctions $f_1^r, f_2^r, \ldots, f_p^r$ des classes inférieures

---

(¹) On pourrait remplacer dans cet énoncé *classe* α *au plus* par *classe inférieure à* α.

En considérant le cas où φ serait de classe β, on serait conduit à la définition de la somme des symboles de classe.

à β. En vertu de la continuité de φ, Φ est évidemment la limite, pour r infini, de $\psi_r = \varphi(f_1^r, f_2^r, \ldots, f_p^r)$. Si nous admettons que le théorème est vrai pour $\alpha < \beta$, ψ_r est de classe inférieure à β, donc Φ est de classe β au plus, le théorème est vrai pour $\alpha = \beta$. D'ailleurs, il est évident pour $\alpha = 0$, donc il est vrai pour toutes les classes.

Pour les applications il peut être nécessaire de faire sur φ d'autres hypothèses; par exemple, il peut être nécessaire d'étudier le cas de $\varphi = \frac{t_1}{t_2}$, pour démontrer que le quotient de deux fonctions f_1 et f_2 de classe α au plus est de classe α au plus quand on suppose que la fonction diviseur ne s'annule jamais. C'est à ce cas particulier que je vais me borner.

Je suppose donc que $\varphi(t_1, t_2)$ est définie et continue partout, sauf pour $t_2 = 0$. J'appelle φ_p la fonction continue de (t_1, t_2) égale à φ pour $|t_2| \geqq \frac{1}{p}$ et variant linéairement par rapport à t_2, quand t_2 varie de $-\frac{1}{p}$ à $+\frac{1}{p}$. Alors, f_2 étant différente de *zéro* par hypothèse, pour que $\Phi = \varphi(f_1, f_2)$ ait un sens, Φ est la limite, pour r infini, des fonctions partout définies, $\psi_r = \varphi_r(f_1^r, f_2^r)$; f_1^r et f_2^r ayant les mêmes significations que précédemment. A l'aide de ces nouvelles fonctions ψ_r on démontrera le théorème comme plus haut (¹).

J'utiliserai aussi le théorème I dans le cas de la fonction composée $\varphi(f_1, f_2)$, f_1 et f_2 ne s'annulant pas en même temps, et φ étant partout définie et continue sauf à l'origine; on légitimera facilement le théorème I dans ce cas et, d'une manière générale, toutes les fois que l'ensemble des points où φ n'est pas définie est fermé.

Voici maintenant une conséquence du théorème I, peu importante par elle-même, mais qui nous sera fort utile. Je considère la fonction $\varphi(t)$ égale à t pour $a \leqq t \leqq b$, égale à a pour $t \leqq a$, égale à b pour $t \geqq b$; c'est une fonction continue; donc $\varphi(f)$ est au plus de la classe de f. $\varphi(f)$ est égale à f pour $a \leqq f \leqq b$, à a pour $f \leqq a$, à b pour $f \geqq b$; je dirai que $\varphi(f)$ est *la fonction f limitée à a et b*. Si $a = -\infty$, je

(¹) Il est à remarquer que ce raisonnement ne serait plus suffisant s'il s'agissait de fonctions f_1, f_2 non partout définies, car la limite de ψ_r pourrait avoir un sens, sans que Φ en ait un.

dirai que $\varphi(f)$ est *la fonction f limitée supérieurement à b*; si $b = +\infty$, je dirai que $\varphi(f)$ est *la fonction limitée inférieurement à a.*

II. *En limitant une fonction à a et b, on n'augmente pas sa classe.*

Dans cette opération, l'ensemble des points où f n'a pas changé est l'ensemble des points pour lesquels on a $a \leqq f \leqq b$, ensemble que je désignerai par $E(a \leqq f \leqq b)$ (¹). Cette simple remarque fait prévoir l'importance des ensembles $E(a \leqq f \leqq b)$, c'est à leur étude qu'est consacré le paragraphe suivant. Voici une conséquence de II.

Si f est de classe α, la fonction f limitée inférieurement à b, f_b, la fonction f limitée à a et b, f_a^b, la fonction f limitée supérieurement à a, f^a, sont des fonctions de classe α au plus, et l'une d'elles est effectivement de classe α. Si l'on a $a < 0 < b$, on peut dire la même chose des trois fonctions $\frac{1}{f_b}$, f_a^b, $\frac{1}{f^a}$; mais, de plus, ces trois fonctions sont bornées. La classe de f étant exactement la plus grande des classes de ces trois fonctions, dans l'étude des fonctions de classe α au plus, on pourra, si on le juge utile, se borner à la considération des fonctions bornées (²).

Plus généralement on pourra diviser comme on le voudra l'intervalle de variation de f, c'est-à-dire l'intervalle à une dimension qui a pour extrémités les limites inférieure et supérieure de f, et remplacer l'étude de f par l'étude de fonctions ayant pour intervalles de variation les intervalles partiels arbitrairement choisis.

Soit f une fonction de classe α, ayant l et L pour limites inférieure et supérieure; f est la limite d'une suite de fonctions f_1, f_2, de classe inférieure à α; en limitant ces fonctions à l et L, je n'augmente pas leur classe, je ne change pas leurs limites; donc, je pourrai toujours

---

(¹) J'emploierai aussi les notations $E(a < f < b)$, $E(f \neq 0)$, ..., sans qu'il soit besoin d'insister sur leurs significations. Pour éviter des confusions possibles, les parenthèses des symboles précédents seront parfois remplacées par des crochets ou des accolades.

(²) Je rappelle qu'il est question de fonctions partout définies.

supposer que les f_i sont toutes comprises entre l et L. Cette remarque nous conduit facilement au théorème III.

III. *Une suite, uniformément convergente, de fonctions de classe α au plus, a pour limite une fonction de classe α au plus.*

Soient $f_1, f_2, \ldots$ la suite considérée, f sa limite. On peut, quel que soit ε_p, trouver n_p tel que l'on ait, pour tous les points,

$$|f - f_{n_p}| < \varepsilon_p.$$

J'écris

$$f = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \ldots;$$

c'est une série uniformément convergente de fonctions de classe α au plus. Son terme général $(f_{n_p} - f_{n_{p-1}})$ est, en valeur absolue, inférieur à $\varepsilon_p + \varepsilon_{p-1}$; on peut le considérer comme la limite d'une suite convergente de fonctions $\varphi_p^1, \varphi_p^2, \ldots$ des classes inférieures à α, et même supposer que $|\varphi_p^i|$ ne surpasse pas $\varepsilon_p + \varepsilon_{p-1}$. Posons

$$\psi_q = \varphi_1^q + \varphi_2^q + \ldots + \varphi_q^q,$$

ψ_q est de classe inférieure à α; supposons que q augmente indéfiniment, la somme des p premiers termes de ψ_p tend vers f_{n_p}, la somme des autres est moindre, en valeur absolue, que

$$\varepsilon_p + \varepsilon_q + 2(\varepsilon_{p+1} + \varepsilon_{p+2} + \ldots + \varepsilon_{q-1});$$

donc, si la série $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$ a été choisie convergente, ψ_q tend vers f; le théorème est démontré.

IV. — Classification des ensembles mesurables B.

Nous dirons qu'un ensemble de points est F, de classe α, s'il peut être considéré comme l'ensemble $E(a \leq f \leq b)$, relatif à une fonction f de classe α, et si cela est impossible à l'aide d'une fonction de classe inférieure à α. Nous dirons qu'un ensemble de points est O,

de classe α, s'il peut être considéré comme l'ensemble $E(a < f < b)$ relatif à une fonction f, de classe α, et si cela est impossible à l'aide d'une fonction de classe inférieure à α.

Voici la raison de ces dénominations : pour $\alpha = 0$, les ensembles F sont les ensembles *fermés*, c'est-à-dire ceux qui contiennent leurs dérivés ou encore, si l'on veut, ceux qui contiennent leurs frontières; les ensembles O, de classe o, sont les ensembles *ouverts*, c'est-à-dire ceux qui sont les complémentaires des ensembles fermés, ou encore, si l'on veut, ceux qui ne contiennent aucun point de leurs frontières.

Soient $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ des fonctions continues qui sont nulles pour les valeurs suivantes, et pour celles-là seulement :

$$\varphi_1(t) = 0 \quad \text{pour} \quad a \leq t \leq b,$$
$$\varphi_2(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq a \quad \text{et} \quad t \geq b,$$
$$\varphi_3(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

et supposons de plus que $\varphi_3(t)$ n'est jamais négative. Alors, d'après I, $\varphi_1(f)$, $\varphi_2(f)$, $\varphi_3(f)$ sont de classe α au plus, si f est de classe α.

De l'identité évidente

$$E(a \leq f \leq b) \equiv E[\varphi_1(f) = 0],$$

on déduit que les ensembles F de classe α sont ceux qui peuvent être considérés comme ensemble $E(f = 0)$, où f est de classe α et ne peut être de classe inférieure à α. Des identités

$$E(a < f < b) \equiv E[\varphi_2(f) \neq 0],$$
$$E(f \neq 0) \equiv E[0 < \varphi_3(f) < +\infty],$$

on déduit que les ensembles O de classe α sont ceux qui peuvent être considérés comme ensembles $E(f \neq 0)$, où f est de classe α et ne peut être de classe inférieure à α (¹).

De ces nouvelles définitions il résulte que le complémentaire d'un

(¹) On peut même supposer que le module de f est limité comme on le veut, d'après le théorème II.

ensemble F ([1]) est un ensemble O de même classe, et inversement. Cela me permettra de ne considérer dans la suite que les ensembles F de classe α que j'appellerai alors simplement *ensembles de classe* α. Dans ce paragraphe, où je vais étudier la formation des ensembles de classe quelconque, je donnerai les propriétés sous les deux formes qu'elles prennent suivant qu'on les énonce en parlant d'ensembles F ou d'ensembles O.

Je désignerai par $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les ensembles F et O précédemment définis, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles $E(f=0)$, $E(f\neq 0)$, où f est exprimable analytiquement. Je vais étudier la nature des ensembles obtenus en effectuant sur des ensembles de $\mathcal{E}$ les deux opérations suivantes :

L'opération I *donne l'ensemble formé des points appartenant à l'un au moins des ensembles d'une famille donnée d'ensembles.*

L'ensemble ainsi obtenu s'appelle la somme des ensembles donnés; si les ensembles donnés E_1, E_2, ... sont en nombre fini ou dénombrable, je représenterai l'ensemble somme par la notation

$$E_1+E_2+\ldots.$$

L'opération II *donne l'ensemble formé des points communs à tous les ensembles d'une famille donnée d'ensembles. L'ensemble ainsi obtenu s'appelle la partie commune aux ensembles donnés;* si ceux-ci E_1, E_2, ... sont en nombre fini ou dénombrable, je représenterai la partie commune par la notation $(E_1, E_2, \ldots)$ ou $[E_1, E_2, \ldots]$ ou $\{E_1, E_2, \ldots\}$.

Si Ce désigne le complémentaire de e, on a

$$C(E_1, E_2, \ldots) = CE_1 + CE_2 + \ldots,$$

l'opération II peut donc être remplacée par l'opération I et *une nouvelle opération* III *permettant le passage d'un ensemble à son complémentaire*. Cette remarque sera souvent utilisée.

Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions de classe α au plus,

$$\varphi_1 = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2, \qquad \varphi_2 = f_1 f_2 \ldots f_n$$

---

[1] C'est-à-dire l'ensemble des points n'en faisant pas partie.

sont de classe α au plus. Des identités

$$E(\varphi_1 = 0) = [E(f_1 = 0), E(f_2 = 0), \ldots, E(f_n = 0)],$$
$$E(\varphi_2 = 0) = E(f_1 = 0) + E(f_2 = 0) + \ldots + E(f_n = 0)$$

et de la remarque précédente on déduit que :

Les opérations I *et* II *appliquées à un nombre fini d'ensembles* F (*ou* O) *de classe* α *au plus donnent des ensembles* F (*ou* O) *de classe* α *au plus.*

Occupons-nous du cas où les opérations I et II sont appliquées à une infinité dénombrable d'ensembles donnés. Soient $E_1, E_2, \ldots$ des ensembles F de classe α au plus, on peut trouver f_i de classe α au plus et telle que E_i soit identique à $E(f_i = 0)$, on peut même supposer que la série

$$\varphi_1 = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 + \ldots$$

est uniformément convergente puisqu'on peut assujettir $|f_i|$ à être inférieur à $\frac{1}{i}$. Alors φ_1 est encore de classe α au plus, donc :

La partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles F *de classe* α *au plus est* F *de classe* α *au plus*, ou encore *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles* O *de classe* α *au plus est* O *de classe* α *au plus.*

La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F de classe α n'est pas nécessairement un ensemble F de classe α ni même un ensemble F de classe $\alpha + 1$. Par exemple, l'ensemble des valeurs rationnelles de t est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F de classe 0 formés chacun d'un seul point; ce n'est cependant ni un ensemble F de classe 0, ni un ensemble F de classe 1 [1]. Pour pré-

---

[1] En effet, une fonction $f(t)$ qui s'annulerait pour les valeurs rationnelles de t et celles-là seulement ne pourrait être continue que pour des valeurs rationnelles de t. Or, si $f(t)$ était de classe 1, d'après un théorème de M. Baire (théorème XV), $f(t)$ aurait, dans tout intervalle, des points de continuité; par suite,

ciser la nature d'une telle somme, je vais démontrer qu'*un ensemble* F (*ou* O) *de classe* α *est* O (*ou* F) *de classe* $\alpha + 1$ *au plus.*

Soit $E(f = 0)$ un ensemble F de classe α, f étant de classe α. Soit $\varphi(t)$ une fonction définie par $\varphi(t) = 0$ pour $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$. On a $\varphi(t) = \lim_{n=\infty} 2^{-nt^2}$, d'où

$$\varphi(f) = \lim_{n=\infty} 2^{-nf^2},$$

la fonction du second membre étant de classe α au plus, $\varphi(f)$ est de classe $\alpha + 1$ au plus. De là il résulte que les ensembles

$$E(f = 0) \equiv E[\varphi(f) = 1] \equiv E[\varphi(f) \neq 0],$$
$$E(f \neq 0) \equiv E[\varphi(f) \neq 1] \equiv E[\varphi(f) = 0]$$

sont à la fois F et O de classe $\alpha + 1$ au plus, cela démontre la proposition. Faire la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F de classe α au plus c'est donc faire la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles O de classe $\alpha + 1$ au plus, par suite *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles* F *de classe* α *au plus est un ensemble* O *de classe* $\alpha + 1$ *au plus; donc un ensemble* F *de classe* $\alpha + 2$ *au plus.* Ou encore *la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles* O *de classe* α *au plus est un ensemble* F *de classe* $\alpha + 1$ *au plus, donc un ensemble* O *de classe* $\alpha + 2$ *au plus.*

L'ensemble $\mathcal{E}$, qui est formé par la réunion de tous les ensembles F et O, peut donc être aussi considéré comme l'ensemble des ensembles F, ou celui des ensembles O. De plus, si l'on applique l'une ou l'autre des opérations I, II à partir d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles de $\mathcal{E}$ dont les classes sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, comme on peut tou-

---

quel que soit ε, l'ensemble des points où $|f(t)|$ surpasserait ε serait partout non dense; l'ensemble des points où $f(t)$ différerait de zéro serait donc de première catégorie (*voir* p. 184), ce qui est impossible, puisque c'est le complémentaire de l'ensemble des valeurs rationnelles de t, lequel est de première catégorie.

Sous une autre forme, cette remarque a été faite par M. Volterra dans le *Giornale de Battaglini*, 1881 (*Alcune osservazione sulle funzioni punteggiate discontinue*).

jours trouver un symbole α supérieur à tous ces α_i, ce sera appliquer cette opération à des ensembles de classe α au plus, donc cela conduira à un ensemble de $\mathcal{E}$. Ainsi l'application répétée des opérations I et II (auxquelles on peut, si l'on veut, joindre l'opération III) ne permet pas de sortir de l'ensemble $\mathcal{E}$. Ces opérations vont nous permettre de former tous les ensembles de $\mathcal{E}$, mais il est utile pour cela de donner une nouvelle définition.

J'appellerai *ensemble de rang* α tout ensemble qui peut être considéré comme la partie commune à un nombre fini ou à une infinité dénombrable d'ensembles F des classes inférieures à α, cela étant supposé impossible lorsque l'on remplace α par un symbole plus petit. Si α est de première espèce, les ensembles de rang α sont compris parmi les ensembles de classe $\alpha - 1$; examinons le cas où α est de seconde espèce. Soient $f_1, f_2, \ldots$ des fonctions des classes inférieures à α et telles que la série

$$\varphi_1 = f_1^2 + f_2^2 + \ldots$$

soit uniformément convergente; nous ne pouvons pas affirmer que φ_1 est de classe inférieure à α, mais φ_1 est de classe α au plus. L'ensemble $E(\varphi_1 = 0) \equiv [E(f_1 = 0),\ E(f_2 = 0), \ldots]$ est l'ensemble le plus général de rang α au plus, donc un tel ensemble est toujours F de classe α au plus. On peut aller un peu plus loin; reprenons la fonction $\varphi(t) = \lim\limits_{n=\infty} 2^{-nt^2}$ et posons

$$\varphi_2 = \varphi(f_1) \times \varphi(f_2) \times \ldots.$$

Ce produit infini est convergent et de classe α au plus, car si f_i est de classe $\alpha_i < \alpha$, $\varphi(f_i)$ est de classe $\alpha_{i+1} < \alpha$. L'ensemble $E(\varphi_2 = 1)$, qui est l'ensemble de rang α au plus précédemment considéré, peut aussi être noté $E(\varphi_2 \neq 0)$; donc, *si* α *est de seconde espèce, les ensembles de rang* α *sont à la fois* F *et* O *de classe* α; cela est vrai quel que soit α [1].

Remarquons encore que les fonctions $1 - \varphi(f_1)\,\varphi(f_2)\ldots\varphi(f_n)$, qui

---

[1] Puisque, si α est de première espèce, un ensemble de rang α est F de classe $\alpha - 1$.

sont de classes inférieures à α et qui ne décroissent jamais quand n croît constamment, tendent vers la fonction $1-\varphi_2$ qui ne prend que les valeurs 0 et 1 et qui s'annule pour les points de l'ensemble considéré. Cette propriété, qui suppose α de seconde espèce, sera utile plus tard.

D'après la définition même des ensembles de rang α, que α soit de première ou de seconde espèce, la partie commune à un nombre fini ou à une infinité dénombrable d'ensembles de rang α au plus est un ensemble de rang α au plus. La définition des ensembles de rang α peut d'ailleurs être un peu modifiée; soient $E_1, E_2, \ldots$ des ensembles F de classes inférieures à α dont la partie commune est un ensemble e de rang α. Si $e_i = (E_1, E_2, \ldots, E_i)$, e_i est, on le sait, F de classe inférieure à α, mais $e = (e_1, e_2, \ldots)$; donc on peut, dans la définition des ensembles de rang α, supposer que l'on applique l'opération II à une suite dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α, telle que chaque ensemble contienne tous ceux qui le suivent. En d'autres termes, on remplace l'opération II par l'opération II′ :

L'opération II′ *fournit la partie commune à une suite dénombrable d'ensembles donnés* $e_1, e_2, \ldots$, *telle que chaque ensemble contienne tous ceux qui le suivent.*

De la définition ainsi modifiée résulte immédiatement que la *somme d'un nombre fini d'ensembles de rang* α *est un ensemble de rang* α. D'ailleurs un ensemble de rang α étant toujours O de classe α au plus, *la somme d'une infinité d'ensembles de rang* α *au plus est un ensemble* O *de classe* α *au plus* [1].

---

(1) Il reste à démontrer que, pour α de seconde espèce, il existe bien des ensembles de rang α; pour la suite il est même utile de démontrer qu'il existe, pour α de seconde espèce, des ensembles de rang α qui ne sont pas somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles de rang α dont les complémentaires ne sont pas de rang α. Des propriétés qui vont suivre il résultera que, si tout ensemble de rang α avait pour complémentaire un ensemble de rang α, auquel cas les opérations I, II, III appliquées à des ensembles de rang α au plus donneraient des ensembles de rang α au plus, il n'existerait pas d'ensembles de classe supérieure à α, donc pas de fonctions de classe supérieure à α. Or on verra au paragraphe VIII qu'il

Voici maintenant comment on passe des ensembles des classes inférieures à α à ceux de classe α.

Soit f une fonction de classe α limite des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ de classes inférieures à α. Si l'on pose

$$E_{n,h} = [E(a+h \leqq f_n \leqq b-h),\ E(a+h \leqq f_{n+1} \leqq b-h),\ \ldots],$$

on a

$$\begin{aligned} E(a<f<b) = \quad & E_{1,\frac{1}{1}} + E_{2,\frac{1}{1}} + E_{3,\frac{1}{1}} + \ldots \\ & + E_{1,\frac{1}{2}} + E_{2,\frac{1}{2}} + E_{3,\frac{1}{2}} + \ldots \\ & + E_{1,\frac{1}{3}} + E_{2,\frac{1}{3}} + E_{3,\frac{1}{3}} + \ldots . \end{aligned}$$

On obtient donc tout ensemble O *de classe α en effectuant, dans l'ordre* A, B, *les deux opérations :*

A. *On prend la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles* F *de classes inférieures à α; cela donne les ensembles de rang α au plus.*

B. *On fait la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de rang α au plus; cela donne, nous le savons, des ensembles* O *de classe α au plus.*

Ainsi les deux opérations A, B donnent tous les ensembles O de classe α et ne donnent que des ensembles O de classe α au plus. D'ailleurs, l'opération A n'est utile que si α est de seconde espèce.

Pour avoir les ensembles F *de classe α, il faut effectuer, après* A *et* B, *l'opération* C :

C. *On prend les complémentaires des ensembles* O *de classe α au plus; ce qui donne les ensembles* F *de classe α au plus.*

On peut, en se servant du passage d'un ensemble à son complémen-

---

existe des fonctions de toute classe, donc il existe des ensembles de rang α jouissant de la propriété indiquée.

On pourrait d'ailleurs *nommer* un ensemble de rang α en employant des procédés analogues à ceux du paragraphe VIII.

taire, remplacer ces opérations par d'autres de bien des manières possibles, j'en cite un seul exemple.

Pour passer des ensembles O des classes inférieures à α aux ensembles O de la classe α au plus, il suffit d'effectuer les trois opérations A_1, B_1, C_1.

A_1. On fait la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles O de classes inférieures à α.

B_1. On prend la partie commune à toutes les suites dénombrables d'ensembles formées avec les ensembles fournis par A_1.

C_1. On prend les complémentaires des ensembles que donne B_1.

A_1 n'est nécessaire que si α est de seconde espèce; A_1 et B_1 fournissent les ensembles F de classe α au plus.

Avant d'aller plus loin supposons, pour un instant, qu'on se soit servi dans la classification des ensembles de toutes les fonctions, partout définies ou non. Sans raisonnements nouveaux nous pouvons affirmer que les opérations A, B, C, ou A_1, B_1, C_1, appliquées aux ensembles F, ou O, des classes inférieures à α, nous auraient encore fait connaître ceux de classes α; seulement, nous ne pouvons pas affirmer sans raisonnement qu'elles ne nous auraient donné que ces ensembles. Mais cela est presque évident; les ensembles de classe o étant les mêmes dans les deux classifications, de ce qui précède il résulte que l'ensemble des ensembles de classe α au plus relatif à la seconde classification est contenu dans celui relatif à la première; or le passage de la première à la seconde classification ne peut qu'étendre le contenu de l'ensemble des ensembles de classe α au plus, quel que soit α; donc les deux classifications donnent les mêmes résultats.

Les opérations C et C_1 ne sont que l'opération III appliquée à des ensembles particuliers, les opérations B et A_1 ne diffèrent pas de I, B_1 et A ne diffèrent pas de II. Puisqu'on peut se passer des opérations C et C_1, on voit que l'on peut former, par l'application répétée de I et II, tous les ensembles de $\mathcal{E}$ à partir des ensembles fermés et ouverts, et même on peut toujours remplacer II par II'.

Remarquons que tout ensemble O de classe α étant O de classe inférieure à $\alpha + 1$ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles F de classe α, donc les ensembles ouverts sont sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, ce qui d'ailleurs se prouve immé-

diatement de bien des manières. Soit maintenant E un ensemble fermé, j'appelle E_p l'ensemble somme de ceux des intervalles

$$\frac{a_1}{p} \leq x_1 \leq \frac{a_1+1}{p}, \qquad \frac{a_2}{p} \leq x_2 \leq \frac{a_2+1}{p}, \qquad \dots, \qquad \frac{a_n}{p} \leq x_n \leq \frac{a_n+1}{p},$$

où les a_i sont entiers, qui contiennent des points de E. On a évidemment

$$E = \left(E_1, E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{1}{3}}, \dots\right);$$

l'opération indiquée dans le second membre est l'opération II'.

Ainsi, $\mathcal{E}$ *est formé des ensembles que l'on obtient par l'application répétée des opérations* I *et* II (*ou* I *et* II') *à partir d'intervalles*. Les ensembles ainsi construits sont ceux que j'ai déjà eu l'occasion de considérer ailleurs et que j'ai appelés les ensembles mesurables B parce que ce sont ceux qu'on peut mesurer par les procédés donnés par M. Borel ([1]).

J'indiquerai dans le paragraphe suivant quelle importance il y aurait à savoir résoudre cette question : un ensemble étant donné, reconnaître s'il est ou non mesurable B et quelle est sa classe? Je n'aborderai pas cette question, je me contenterai de montrer comment parfois une telle recherche peut être faite ([2]).

([1]) Voir ma Thèse et mes *Leçons sur l'intégration*. J'abandonne ici une restriction que j'avais adoptée aux endroits indiqués, savoir que les opérations I et II ne sont appliquées qu'un nombre fini de fois. Cette restriction n'est jamais intervenue dans mes raisonnements, je l'avais indiquée parce qu'elle conduit à une famille d'ensembles plus voisine, à ce qu'il m'a semblé, de celle que considère M. Borel dans ses *Leçons sur la Théorie des fonctions*.

De ce qui sera démontré dans la suite, il résulte que les ensembles mesurables B sont ceux qui peuvent être définis par des égalités ou inégalités analytiques; pour cette raison ils mériteraient d'être nommés *ensembles analytiques*.

([2]) Il est évident qu'il serait illusoire de chercher à répondre à la question posée sous la forme trop générale que je lui ai donnée; mais, examinant successivement les différents procédés que l'on emploie ordinairement pour *nommer* des ensembles, il faudrait donner pour chacun d'eux un moyen de faire l'étude en question (comparer avec la page 183). Au point de vue auquel je me suis

Un premier procédé souvent commode résulte de l'emploi de la définition même des ensembles mesurables B. Si l'on démontre qu'un ensemble peut être construit à partir d'intervalles, à l'aide des opérations I et II, on sait qu'il est mesurable B et l'on a une limite supérieure de sa classe en tant qu'ensemble F ou O. J'ai donné un exemple de cette méthode dans mes *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* aux pages 109 et 110.

Un autre procédé, donnant les mêmes renseignements et qui résulte de ce qui précède, est de démontrer que l'ensemble donné est un ensemble F ou O attaché à une fonction f de classe déterminée [1].

En utilisant des résultats ultérieurs on pourrait même dire qu'il suffit que f soit représentable analytiquement ou soit définie analytiquement. De l'application de ce second procédé résulte donc immédiatement que tout ensemble qui est défini par un nombre fini ou dénombrable d'égalités ou d'inégalités entre fonctions exprimables analytiquement à l'aide des coordonnées, est mesurable B.

V. — Étude, sur certains ensembles de points, des fonctions de classe donnée.

J'appelle *fonction mesurable* B toute fonction f telle que, quels que soient a et b, l'ensemble $E(a \leq f \leq b)$ soit mesurable B. D'après ce qui précède, on pourrait tout aussi bien dire que f est mesurable B si, quels que soient a et b, $E(a < f < b)$ est mesurable B ou encore si, quel que soit a, $E(a < f)$ est mesurable B.

---

placé, c'est cette étude qu'il importerait de faire pour que les résultats du texte aient une valeur pratique.

Les méthodes que je viens d'indiquer, pour reconnaître qu'un ensemble donné est mesurable B, semblent s'appliquer à tout ensemble donné par l'un des procédés classiques; c'est pourquoi j'ai dit que tous les ensembles que l'on considère ordinairement sont mesurables B, que toutes les fonctions considérées ordinairement sont représentables analytiquement.

[1] Il faut remarquer qu'il n'y a pas cercle vicieux à employer ce second procédé, même si le but final est de reconnaître si une fonction φ, auquel l'ensemble donné est attaché comme F ou O, est représentable analytiquement. Car on peut prendre f différente de φ.

On peut aussi remarquer qu'il suffit que tous les $E(r_1 \leqq f \leqq r_2)$, où les r_1 et r_2 sont rationnels, soient mesurables B pour que f le soit. En effet, on peut prendre des nombres rationnels r_1^p, r_2^p, tendant vers a et b quand p augmente indéfiniment et tels que l'on ait

$$r_1^p \leqq a < b \leqq r_2^p,$$

a et b étant des nombres donnés. Alors $E(a \leqq f \leqq b)$ est la partie commune à tous les ensembles $E(r_1^p \leqq f \leqq r_2^p)$, lesquels sont mesurables B, donc $E(a \leqq f \leqq b)$ est mesurable B.

Cette propriété nous montre que, si l'on savait reconnaître si un ensemble est, ou non, mesurable B, on reconnaîtrait, par une infinité dénombrable d'opérations, si une fonction est, ou non, mesurable B.

Reprenons les $E(r_1 \leqq f \leqq r_2)$; s'ils sont tous mesurables B, on peut tous les considérer comme des ensembles de classes déterminées ([1]). Mais ces classes sont en nombre fini ou dénombrable; par suite, on peut citer un symbole α tel que tous les $E(r_1 \leqq f \leqq r_2)$ soient de classe α au plus. Mais $E(a \leqq f \leqq b)$ étant la partie commune à certains

$$E(r_1 \leqq f \leqq r_2)$$

est aussi de classe α. Par suite, si f est mesurable B, on peut citer un symbole α tel que tous les $E(a \leqq f \leqq b)$ soient de classe α au plus. Ce nombre α va servir à caractériser la nature de f, lorsque f est partout définie.

IV. *Pour qu'une fonction f partout définie soit de classe α, il faut et il suffit que, quels que soient a et b, l'ensemble* $E(a \leqq f \leqq b)$ *soit de classe α au plus, et qu'il soit effectivement de classe α pour certaines valeurs de a et b* ([2]).

La condition est évidemment nécessaire, c'est la définition même des ensembles de classe α.

([1]) Sauf indications contraires, je dirai désormais *ensemble de classe* α au lieu de *ensemble* F *de classe* α.

([2]) Cette proposition n'est pas vraie si les fonctions sont partout définies; pour ces fonctions, il y a lieu de tenir compte de la nature de l'ensemble des points en lesquels la fonction est définie.

Pour démontrer qu'elle est suffisante il suffira, d'après une remarque antérieure, de considérer le cas où f est bornée.

Je divise l'intervalle de variation de f en un nombre fini d'intervalles partiels de longueur inférieure à ε; soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les extrémités de ces intervalles. Soit φ_i ($i = 0, 1, \ldots, n+1$) une fonction de classe α au plus telle que les deux ensembles $E(\varphi_i = 0)$, $E(a_{i-1} \leq f \leq a_i)$ soient identiques. Soit enfin $\varphi(u, v)$ une fonction continue, partout définie sauf à l'origine, égale à 0 pour $u = 0$, égale à 1 pour $v = 0$, et comprise entre 0 et 1 pour les autres valeurs de u et v. On sait que, si u et v sont de classe α au plus et ne s'annulent pas en même temps, $\varphi(u, v)$ est de classe α au plus.

La fonction F,

$$\begin{aligned} F = a_0 &+ (a_1 - a_0)\varphi(\varphi_0, \varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n+1}) \\ &+ (a_2 - a_1)\varphi(\varphi_0\varphi_1, \varphi_3\varphi_4\ldots\varphi_{n+1}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (a_n - a_{n-1})\varphi(\varphi_0\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}, \varphi_{n+1}) \quad (^1) \end{aligned}$$

est de classe α au plus. F diffère de f de moins de ε; ε étant quelconque, f peut être considérée comme la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions F de classe α au plus, f est une fonction de classe α au plus. D'ailleurs, si l'un des $E(a \leq f \leq b)$ est de classe α, f est exactement de classe α.

L'énoncé précédent peut prendre la forme suivante :

V. *Pour qu'une fonction f partout définie soit de classe α au plus, il faut et il suffit que, quels que soient les nombres rationnels r_1 et r_2, $E(r_1 \leq f \leq r_2)$ soit de classe α au plus.*

VI. *Pour qu'une fonction soit représentable analytiquement, il faut et il suffit qu'elle soit mesurable* B. — Je démontre d'abord que la condition est nécessaire. Les fonctions représentables analytiquement étant construites à partir des variables à l'aide d'additions,

---

(1) Si φ_0 est nulle, φ_1 l'est aussi; si φ_{n+1} est nulle, φ_n l'est aussi. Cela permet, si l'on y voit avantage, de simplifier l'expression de F.

de multiplications et de passages à la limite, la démonstration résulte des trois propriétés a, b, c qui suivent.

a. La somme de deux fonctions mesurables B est une fonction mesurable B.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions mesurables B; quels que soient a et r l'ensemble $[E(f_1 > r), E(f_2 > a - r)]$ est mesurable B. Or la somme de ceux de ces ensembles qui correspondent aux valeurs rationnelles de r est l'ensemble $E(f_1 + f_2 > a)$; $f_1 + f_2$ est donc mesurable B.

b. Le produit de deux fonctions mesurables B est une fonction mesurable B.

La démonstration est analogue à celle de a.

c. La limite d'une suite de fonctions mesurables B est une fonction mesurable B.

Soit f la limite de la suite $f_1, f_2, \ldots$; on ne suppose pas que les f_i soient partout définies ni soient convergentes partout dans l'ensemble où elles sont toutes définies. En posant

$$E_n = [E(a < f_n < b), E(a < f_{n+1} < b), \ldots],$$

on a

$$E(a < f < b) = E_1 + E_2 + \ldots;$$

donc, f est mesurable B.

La condition énoncée est donc nécessaire; j'en déduis que l'ensemble des points sur lequel existe une fonction f exprimable analytiquement est mesurable B. En effet, l'ensemble considéré est la somme de tous les $E(-n \leq f \leq n)$, où n est entier, et tous ces ensembles sont mesurables B [1]. L'ensemble des points en lesquels f n'a pas de sens est donc mesurable B.

La condition énoncée est suffisante. Cela résulte de IV et V pour les fonctions partout définies. Si f n'est pas partout définie mais est mesurable B, la fonction f_p, égale à f quand f existe et à p quand f

---

[1] En particulier, les ensembles de points de convergence des suites de fonctions continues, qui ont été parfois employés pour citer des exemples de certaines particularités, rentrent tous dans la famille $\mathcal{E}$ des ensembles mesurables B.

La question posée incidemment par M. Borel, dans la Note 1 de la page 67 de ses *Leçons sur la Théorie des fonctions*, est donc résolue affirmativement.

n'existe pas, est mesurable B, donc représentable analytiquement; et il en est de même de f limite des f_p.

Le théorème est donc démontré; mais, en se reportant à la démonstration, on voit de plus que *toute fonction représentable analytiquement fait partie de* E, *c'est-à-dire rentre dans la classification de M. Baire.*

Voici de nouvelles définitions ([1]). Je dirai qu'une fonction f est, à ε près, représentable analytiquement lorsqu'il existe une fonction φ représentable analytiquement et telle que $|f-\varphi|$ ne surpasse jamais ε. Si φ peut être choisie de classe α et pas de classe inférieure, je dirai que f est, à ε près, de classe α; si, la fonction φ étant toujours supposée définie dans tout le domaine dont on s'occupe, on a

$$|f-\varphi| \leqq \varepsilon$$

pour les points d'un ensemble E, je dirai que f est, à ε près, de classe α sur E. Ces définitions posées, j'énonce une proposition à laquelle on est conduit en remarquant que la fonction F, employée dans la démonstration du théorème IV, est encore de classe α au plus si les a_i ne sont plus des constantes, mais sont des fonctions de classe α au plus ([2]).

VII. *Pour qu'une fonction f soit de classe α au plus, il faut et il suffit que, quel que soit le nombre positif ε, on puisse considérer le domaine où f est définie comme la somme d'un nombre* fini *d'ensembles de classe α au plus sur chacun desquels f est, à ε près, de classe α au plus.*

Démontrons que la condition est suffisante. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions de classe α au plus. Supposons que, sur $E(\varphi_i = 0)$, f ne

---

([1]) Bien qu'il n'y ait pas de difficultés sérieuses à considérer toutes les fonctions, sauf avis contraire, je ne m'occuperai que des fonctions partout définies, conformément à ce que j'ai dit dans le paragraphe II.

([2]) Cette remarque ne suffit pas pour démontrer le théorème VII parce que la démonstration du théorème IV suppose que trois des fonctions φ_i ne peuvent s'annuler en même temps et la condition analogue n'est plus remplie dans le cas du théorème VII.

On peut cependant démontrer ce dernier théorème par une méthode analogue à celle employée pour le théorème IV, comme on le verra facilement.

diffère de la fonction a_i de classe α au plus, que de ε au plus. L'ensemble $E(\varepsilon)$,

$$E(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{i=n} [E(\alpha - \varepsilon \leq a_i \leq \beta + \varepsilon), E(\varphi_i = 0)],$$

est de classe α au plus. $E(\alpha \leq f \leq \beta)$, qui est la partie commune à tous les $E\left(\frac{1}{n}\right)$, où n est entier, est donc de classe α au plus et le théorème est démontré.

On peut remarquer que, si, au lieu d'un nombre *fini* d'ensembles $E(\varphi_i = 0)$, nous en avions eu une infinité dénombrable, l'ensemble $E(\varepsilon)$, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de classe α, aurait été de classe $\alpha + 2$. De cela on déduit que f aurait été de classe $\alpha + 2$ au plus. Ceci nous fait voir comment nous pouvons espérer établir une relation entre les fonctions de classe α et les fonctions des classes inférieures à α. En reprenant par une autre méthode le cas où les $E(\varphi_i = 0)$ forment une infinité dénombrable, nous allons démontrer que :

Si, quel que soit ε, on peut considérer l'ensemble dans lequel une fonction f est définie comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles des classes inférieures à α, sur chacun desquels f est, à ε près, de classe inférieure à α, alors f est de classe α au plus.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions de classe inférieure à α. Supposons que, sur $E_i = E(\varphi_i) = 0$, f ne diffère que de ε au plus de la fonction a_i de classe inférieure à α. Soient, d'autre part, $\Psi_n(t)$ des fonctions continues nulles pour $t = 0$ et telles que, pour $t \neq 0$, les fonctions $\Psi_n(t)$ tendent vers 1 quand n augmente indéfiniment; par exemple

$$\Psi_n(t) = 1 - e^{-nt^2}.$$

Formons les fonctions

$$F_1 = a_1,$$
$$F_2 = a_1 + (a_2 - a_1)\Psi_1(\varphi_1),$$
$$F_3 = a_1 + (a_2 - a_1)\Psi_2(\varphi_1)$$
$$\quad + \{a_3 - [a_1 + (a_2 - a_1)\Psi_2(\varphi_1)]\}\Psi_2(\varphi_1\varphi_2),$$

et, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} F_{p+1} = a_1 + (a_2 - s_1)\Psi_p(\varphi_1) \\ + (a_3 - s_2)\Psi_p(\varphi_1\varphi_2) + \ldots + (a_{p+1} - s_p)\Psi_p(\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_p), \end{aligned}$$

où s_i désigne la somme des i premiers termes de F_{p+1}. Ce sont des fonctions de classe inférieure à α; elles tendent, quand leur indice augmente indéfiniment, vers la fonction F égale à a_1 sur E_1, égale à a_2 sur $E_2 - (E_1, E_2)$, égale à a_3 sur $E_3 - (E_1 + E_2, E_3)$, et, d'une manière générale, égale à a_p sur $E_p - (E_1 + E_2 + \ldots + E_{p-1}, E_p)$. F est donc de classe α au plus et, puisque f ne diffère de F que de ε au plus, f est au plus de classe α.

Recherchons si la réciproque est vraie. Soit f une fonction de classe α limite de fonctions $f_1, f_2, \ldots$ de classe inférieure à α. Le domaine où f est définie est la somme des ensembles E_n,

$$E_n = \{E[(f_n - f_{n+1})^2 \leqq \varepsilon^2], E[(f_n - f_{n+2})^2 \leqq \varepsilon^2], E[(f_n - f_{n+3})^2 \leqq \varepsilon^2], \ldots\},$$

puisque la suite des f_n est convergente dans ce domaine. E_n, étant la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles de classe inférieure à α, est au plus de rang α. Le domaine considéré est donc la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de rang α au plus sur chacun desquels f est, à ε près, de classe inférieure à α, puisque, dans E_n, on a

$$|f - f_n| \leqq \varepsilon.$$

Mais, si α est de première espèce, E_n est au plus de classe $\alpha - 1$, donc :

VIII. *Pour qu'une fonction f soit de classe $\alpha + 1$, il faut et il suffit que, quel que soit ε, le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de classe α au plus sur chacun desquels f est, à ε près, de classe α au plus.*

En rapprochant cette proposition du théorème IV, on voit que :

IX. *Pour qu'une fonction f soit de classe $\alpha + 1$, il faut et il suffit que, quel que soit ε, le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de*

classe α au plus sur chacun desquels f est d'oscillation au plus égale à ε (1).

Voici, maintenant, un énoncé qui convient à tous les cas :

X. *Pour qu'une fonction f soit de classe $\alpha > 0$ il faut et il suffit que, quel que soit ε, le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de rang α au plus sur chacun desquels f est, à ε près, de classe inférieure à α*; ou encore *sur chacun desquels f est d'oscillation au plus égale à ε*.

Il suffit de démontrer le premier de ces deux énoncés. Il est déjà démontré si α est de première espèce; on sait de plus que la condition énoncée est nécessaire quel que soit α. Il reste à démontrer que, dans le cas où α est de seconde espèce, cette condition est suffisante.

Soient φ_1, φ_2, ... des fonctions de classe α au plus, ne prenant que les valeurs 0 et 1 et définissant des ensembles $E(\varphi_1 = 0)$, $E(\varphi_2 = 0)$, ..., de rang α au plus. On sait que φ_i est la limite d'une suite convergente de fonctions ψ_i^p de classe inférieure à α, ne prenant que les valeurs 0 et 1 et ne décroissant jamais avec p (p. 162).

Supposons que, sur $E(\varphi_i = 0)$, f ne diffère que de ε au plus de la fonction a_i de classe inférieure à α. Formons la fonction F_{p+1},

$$F_{p+1} = a_1 + (a_2 - s_1)\psi_1^p + (a_3 - s_2)\psi_1^p\psi_2^p + \ldots + (a_{p+1} - s_p)\psi_1^p\psi_2^p\ldots\psi_p^p,$$

où s_i désigne la somme des i premiers termes de F_p. On voit, comme précédemment, que les fonctions F_p, de classe inférieure à α, tendent vers une limite F, qui est par suite au plus de classe α, et qui ne diffère de f que de ε au plus.

(1) En remplaçant dans VIII et IX *classe* $\alpha+1$ par *classe* α et *classe* α *au plus* par *classe inférieure à* α, on obtient deux énoncés équivalents qui sont évidemment exacts quand α est de première espèce, puisque alors ces énoncés ne diffèrent pas des théorèmes VIII et IX, mais qui sont tous deux inexacts quand α est de seconde espèce.

En les appliquant, en effet, à une fonction φ de classe α ne prenant que les valeurs 0 et 1 et définissant un ensemble $E(\varphi = 0)$ de rang α, on en déduirait que tout ensemble de rang α est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de classe inférieure à α. Or, on sait que cela est inexact quand α est de seconde espèce. Voir la note de la page 162.

Le théorème est donc démontré (¹).

Aux énoncés qui précèdent on peut évidemment ajouter le suivant, qui ne nous apprend rien de nouveau :

XI. *Pour qu'une fonction f soit exprimable analytiquement il faut et il suffit que, quel que soit ε, l'ensemble dans lequel f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables* B *sur chacun desquels f est, à ε près, représentable analytiquement.*

VI. — Étude en certains points des fonctions de classe donnée.

On vient de voir comment on peut déduire la classe d'une fonction de la nature de cette fonction sur certains ensembles; nous allons maintenant nous placer à un point de vue différent et rechercher comment on peut déduire cette classe de la nature de la fonction en certains points.

Je dirai qu'une fonction est, à ε près, de classe α en un point M s'il existe un intervalle contenant M à son intérieur et dans lequel la fonction est, à ε près, de classe α au plus, cela étant impossible si l'on remplace α par $\beta < \alpha$. Au point M, on peut toujours attacher un nombre positif ou nul, fini ou infini, η_α, tel que la fonction considérée soit, en M, de classe α au plus, à ε près, quand on a $\varepsilon > \eta_\alpha$ et tel que cela ne soit plus vrai pour $\varepsilon < \eta_\alpha$.

Pour $\alpha = 0$, $2\eta_0$ est l'oscillation en M; de sorte que, pour $\eta_0 = 0$, la

(¹) Il est à remarquer que le seul cas où les théorèmes VIII et IX ne sont pas équivalents au théorème X est celui où l'on sait former le moins facilement les ensembles de classe α à partir des ensembles de classe inférieure.

Il faut aussi remarquer que le théorème V présentait, à un certain point de vue, un avantage que n'ont pas les théorèmes VIII, IX, X : celui de fournir un procédé opératoire régulier pour connaître si une fonction est, ou non, de classe α. On verra plus loin ce qu'il faut penser, à mon avis, de ce genre d'avantage (p. 183).

La démonstration des théorèmes qui précèdent aurait pu être simplifiée si l'on avait employé les résultats du paragraphe IV relativement à la formation des ensembles de classe α, à partir de ceux des classes inférieures.

fonction est continue en M. Je dirai qu'*une fonction est de classe* α *en* M *si, en ce point,* $\eta_\alpha = 0$. Cela revient à dire que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ de classe α au plus qui, dans un certain intervalle contenant M à son intérieur, diffère de la fonction donnée de ε au plus, cela étant impossible pour $\beta < \alpha$ (1). Dire qu'une fonction est de classe 0 en un point, c'est dire qu'elle est continue en ce point.

Si les conditions précédentes sont réalisées quand on ne s'occupe que des valeurs de la fonction f donnée pour les points d'un ensemble E, nous dirons, suivant les cas, que f est, à ε près, de classe α en M sur E, ou que f est de classe α en M sur E. Cela ne suppose pas que M appartienne à E, mais la définition ne présente quelque intérêt que si M est l'un des points limites de E.

Si, à ε donné, on peut faire correspondre α tel que f soit, à ε près, de classe α en M, nous dirons que f est, à ε près, représentable analytiquement en M; si, quel que soit $\varepsilon > 0$, f est, à ε près, représentable analytiquement en M, nous dirons que f est représentable analytiquement en M (2).

Considérons la fonction $f(x)$ définie dans $(-1, +1)$ comme étant nulle pour x irrationnel ou nul, comme étant égale à 1 pour $|x| = \frac{1}{2^p}$, où p est entier positif ou nul, comme étant égale à $\frac{1}{p}$ pour x rationnel et tel que $\frac{1}{2^{p+1}} < |x| < \frac{1}{2^p}$; on verrait facilement que $f(x)$ est de classe 2.

$f(x)$ est de classe 2 pour $x \neq 0$; elle est de classe 1 à l'origine, car la fonction $\varphi(x)$, égale à $f(x)$ pour $f(x) = 1$, et à zéro aux autres points, est de classe 1 et, quel que soit ε, on peut trouver $(-a, +a)$

---

(1) Dans cette définition, φ varie avec ε, on verra facilement qu'on peut prendre φ indépendamment de ε, dès que M est donné, mais l'intervalle à considérer varie en général avec ε.

(2) On aurait pu rattacher cette définition à celle d'un certain nombre η analogue à η_α. En appelant oscillation analytique en M le nombre 2η et oscillation de classe α en M le nombre $2\eta_\alpha$, on aurait pu donner, aux énoncés qui suivent, des formes simples qui, peut-être, auraient été préférables à celles que j'ai adoptées.

dans lequel on a

$$0 \leq f(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon.$$

A l'origine $f(x)$ est de classe 0 sur l'ensemble des points $\pm \frac{1}{2^p}$, de classe 1 sur l'ensemble des points à abscisses rationnelles, de classe 0 sur l'ensemble des points à abscisses irrationnelles.

Je vais maintenant démontrer un théorème qui généralise la propriété bien connue relative à la continuité uniforme. J'aurai besoin, pour cela, d'une proposition très simple et très importante de M. Borel : *Si l'on a une famille de domaines* Δ *tels que tout point d'un certain domaine* D, *y compris les points frontières de* D, *soit intérieur à l'un au moins des* Δ, *il existe une famille formée d'un nombre fini de domaines choisis parmi les domaines* Δ *et qui jouissent de la même propriété* (*tout point de* D *est intérieur à l'un d'eux*) (1).

---

(1) M. Borel a énoncé ce théorème pour le cas où l'ensemble des Δ est dénombrable; il a donné pour ce cas deux démonstrations simples qui s'étendent aux domaines à un nombre quelconque de dimensions. [*Voir* la Thèse de M. Borel, *Sur quelques points de la Théorie des fonctions* (*Annales de l'École normale*, 1895) et ses *Leçons sur la Théorie des fonctions;* voir aussi *Contribution à l'analyse arithmétique du continu* (*Journal de Liouville*, 1903).]

Pour les applications du texte il est nécessaire que le théorème soit démontré pour le cas où l'ensemble des Δ n'est pas nécessairement dénombrable; on arrive à cette démonstration en modifiant légèrement celle que M. Borel avait donnée dans sa Thèse. *Voir* mes *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 105 et 117. La démonstration ainsi modifiée ne donne pas un procédé régulier permettant, par une infinité dénombrable d'opérations, d'effectuer parmi les Δ le choix dont elle prouve la possibilité; mais le procédé opératoire indiqué par M. Borel pour le cas des domaines à une dimension reste toujours applicable à ce cas, quelle que soit la puissance de l'ensemble des Δ, pourvu qu'à chaque point de D on sache associer un Δ le contenant. D'ailleurs, d'après la démonstration même (*loc. cit.*, p. 117), le cas d'un domaine à plusieurs dimensions se ramène au cas de la droite, grâce à l'emploi d'une courbe remplissant tout le domaine D. On peut donc, par une infinité dénombrable d'opérations effectuées suivant un procédé régulier, faire le choix qui nous occupe toutes les fois qu'à chaque point de D on sait faire correspondre un Δ le contenant, et cette correspondance sera établie, dans les applications qui suivent, par la définition même des Δ.

De là résulte que, *si une propriété est vraie pour la somme d'un nombre fini de domaines dès qu'elle est vraie de chacun d'eux, elle est vraie pour un domaine* D *dès qu'autour de chaque point de* D *existe un domaine dans lequel elle est vraie.*

Pour appliquer cette remarque considérons une fonction f de classe α au plus ($\alpha \geqq 1$), à ε près, dans chacun des domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Cela veut dire qu'il existe une fonction f_i de classe α au plus et différant de f de ε au plus dans D_i. La fonction φ, égale à f_1 dans D_1, égale à f_2 dans la partie de D_2 extérieure à D_1, égale à f_3 dans la partie de D_3 extérieure à $D_1 + D_2$, etc., est de classe α au plus d'après le théorème VII, car un domaine est un ensemble de classe 0 et la partie d'un domaine extérieure à la somme d'un nombre fini de domaines est un ensemble de classe 0 ou 1. La fonction f qui diffère de φ de ε au plus est donc, d'après VII, de classe α au plus, à ε près, sur

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n \quad (^1).$$

Notre remarque nous permet de conclure que, *si une fonction est, à* ε *près, de classe* α *au plus en tout point d'un domaine* D, *elle est, à* ε *près, de classe* α *au plus dans* D.

Cet énoncé n'est justifié par ce qui précède que pour $\alpha \neq 0$, il est cependant exact pour $\alpha = 0$. Voici comment on peut l'établir. Les conditions de l'énoncé étant remplies, chaque point de D est intérieur à un intervalle Δ dans lequel f est continue à ε près. Prenons un nombre fini de Δ de manière que tout point de D soit *intérieur* à l'un d'eux.

A chaque Δ est attachée une fonction f_Δ continue, différant de f de ε au plus. Soit P un point, il appartient à un ou plusieurs Δ, d'où un ou plusieurs nombres $f_\Delta(P)$. Soit $l(P)$ le plus petit, $L(P)$ le plus grand. On peut toujours construire une fonction continue φ telle que $\varphi(P)$ soit compris entre $l(P)$ et $L(P)$; cela est particulièrement évident pour $n = 1$, mais se voit facilement dans tous les cas.

---

(1) Cette propriété n'est plus vraie pour $\alpha = 0$.

On a évidemment $|f - \varphi| \leqq \varepsilon$ dans D, la propriété est démontrée ([1]).

XII. — *Pour qu'une fonction soit de classe α au plus dans un domaine* D *il faut et il suffit qu'elle soit de classe α au plus en tout point de* D ([2]).

La condition évidemment nécessaire est suffisante. Si elle est remplie, en effet, quel que soit ε, la fonction est, d'après la proposition précédente, à ε près, de classe α au plus et, d'après le théorème III, cela suffit pour que la fonction soit de la classe α au plus.

Ce théorème indique une relation entre la nature d'une fonction dans un domaine et la nature de cette fonction en chaque point du domaine; en ce sens il est à rapprocher du théorème sur la continuité uniforme. Je veux faire une remarque à ce sujet.

L'énoncé XII est pris souvent, pour $\alpha = 0$, comme définition des fonctions continues.

([1]) On peut, en particulier, affirmer que l'on est dans les conditions de l'énoncé si, en tout point de D, f a une oscillation inférieure à 2ε.

Dans ce cas on aurait pu choisir les Δ de façon que, dans chacun d'eux, f soit constante à ε près. Alors deux points d'un même Δ ou de deux Δ ayant des points frontières en commun auraient donné des valeurs de f différant entre elles de 2ε au plus. Or, on peut citer un nombre λ tel que deux points distants de λ au plus soient dans un même δ ou dans deux δ consécutifs, donc : *Si η est un nombre supérieur au maximum de l'oscillation de f en un point quelconque de* D, *il existe un nombre positif λ tel que, si deux points* P *et* Q *sont à une distance au plus égale à λ l'un de l'autre, on a*

$$|f(P) - f(Q)| \leqq \eta.$$

Ce théorème, qui comprend comme cas particulier le théorème sur la convergence uniforme, a été donné par M. Baire à la page 15 de sa Thèse. On peut en donner une démonstration beaucoup plus simple que la précédente (voir *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 21).

([2]) D'après nos conventions les points frontières de D sont des points de D. Pour $\alpha > 0$ on peut dire qu'il suffit que la fonction soit de classe α au plus en tout point intérieur à D et de classe α au plus sur la frontière de D en tout point de cette frontière. Cette dernière condition est remplie d'elle-même s'il s'agit d'une fonction à une seule variable, car la frontière de D se compose alors de deux points.

Si les fonctions continues sont définies par la continuité uniforme, il exprime au contraire une propriété très importante des fonctions continues.

Mais, ainsi entendu, le théorème XII n'est pas démontré par les considérations du texte [1]. Les différences qui se manifestent ainsi entre le cas $\alpha = 0$ et le cas $\alpha > 0$ proviennent de ce que les fonctions continues ne sont pas, comme les autres, définies comme limites de fonctions des classes antérieures. Les fonctions continues sont supposées antérieurement définies et antérieurement étudiées; d'ailleurs, sauf peut-être en ce qui concerne la représentation d'une fonction continue par une série de polynomes, la continuité uniforme des fonctions continues n'est guère intervenue dans nos considérations.

Des raisonnements analogues à ceux qui ont donné le théorème XII montrent que :

XIII. *Pour qu'une fonction soit représentable analytiquement dans un domaine* D, *il faut et il suffit qu'elle soit représentable analytiquement en tout point de* D.

Voici maintenant une conséquence importante du théorème XIII.

Soit f une fonction qui n'est ni de la classe α, ni d'une classe antérieure. Dès que ε est assez petit, il existe des points en lesquels f n'est pas de classe α au plus, à ε près; étudions l'ensemble de ces points.

1° Il est évidemment fermé;

2° Pour $\alpha > 0$, il ne contient aucun point isolé. Soit, en effet, une fonction f qui est, à ε près, de classe α au plus en tous les points distants d'un point M de $\frac{1}{n_0}$ au plus. Il faut démontrer que f est aussi de classe α au plus, à ε près, au point M.

Cela peut se démontrer facilement, sans faire appel aux théorèmes établis dans le paragraphe V, mais, en utilisant ces théorèmes, on peut raisonner un peu plus simplement.

Soit E_n l'ensemble des points dont la distance δ à M vérifie la double

[1] *Voir* la note 1, page 178, où il est démontré par des raisonnements assez analogues à ceux du texte.

inégalité $\frac{1}{n} \geq \delta \geq \frac{1}{n+1}$ · E_n peut toujours être considéré comme la somme de deux domaines; en chaque point de E_n, $(n \geq 0)$, f est, à ε près, de classe α au plus, donc f est, à ε près, de classe α au plus sur E_n. Par suite, E_n est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles e_n de rang α au plus sur chacun desquels f est, à ε près, de classe inférieure à α. L'ensemble formé des e_n, pour $n \geq n_0$, et du point M est un ensemble dénombrable d'ensembles de rang α au plus sur chacun desquels f est, à ε près, de classe inférieure à α, donc f est, à ε près, de classe α dans le domaine $M + E(n_0) + E(n_0 + 1) + \ldots$.

La proposition est établie. Ainsi :

L'ensemble des points en lesquels une fonction f n'est pas, à ε près, de classe $\alpha > 0$ au plus, est un ensemble parfait.

Soit E l'ensemble parfait qui vient d'être défini; je dis que f n'est sur E, à ε près, de classe α au plus en aucun point M de E (¹). Soit, en effet, $\mathfrak{M}$ l'ensemble des points de E distants de M de $\frac{1}{n_0}$ au plus et je suppose, ce qui serait possible si f était, à ε près, de classe α au plus en M sur E, que n_0 est assez grand pour que, sur $\mathfrak{M}$, f soit, à ε près, de classe α au plus. Reprenons le raisonnement précédent en remplaçant M par $\mathfrak{M}$ et E_n par $E_n - (E_n, \mathfrak{M})$; rien n'est changé, sauf que

$$E_n - (E_n, \mathfrak{M})$$

n'est plus en général la somme de deux domaines, mais la somme d'une infinité dénombrable de domaines. Cela suffit pour le raisonnement et nous voyons que, dans les conditions supposées, f serait, à ε près, de classe α au plus en M, ce qui est contraire à la définition de E.

Nous pouvons donc dire en particulier que :

XIV. *Si une fonction n'est ni de la classe $\alpha > 0$, ni d'une classe*

(¹) Il n'y a aucune difficulté à établir cette proposition sans se servir des théorèmes du paragraphe V.

antérieure, il existe un ensemble parfait E *en tout point duquel elle n'est, sur* E, *ni de la classe* α, *ni d'une classe antérieure.*

En d'autres termes, *si l'on sait que sur tout ensemble parfait il existe des points en lesquels une fonction f est de classe* $\alpha > 0$ *au plus sur l'ensemble parfait considéré, on peut affirmer que f est de classe* α *au plus.*

Le cas de $\alpha = 0$ a été exclu. Lorsque, sur tout ensemble parfait, il existe des points en lesquels une fonction f est continue sur l'ensemble considéré, c'est-à-dire lorsque f est *ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait,* nos raisonnements nous permettent seulement d'affirmer que f est au plus de classe 1.

D'ailleurs f peut être effectivement de classe 1, comme le montre l'exemple d'une fonction partout nulle, sauf à l'origine, fonction qui est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

Ainsi, pour $\alpha = 1$, il existe des fonctions de classe α telles que, sur tout ensemble parfait, se trouvent des points en lesquels la fonction est de classe inférieure à α sur l'ensemble parfait; d'après le théorème XIV, cela est impossible pour $\alpha > 1$. Nous allons voir, au contraire, que toute fonction de classe 1 jouit de la propriété énoncée.

Soit f la limite de la suite convergente des fonctions continues f_1, f_2, ..., et soit E un ensemble parfait. Appelons E_n l'ensemble défini par l'égalité

$$E_n = \{E, E[(f_n - f_{n+1})^2 \leqq \varepsilon^2], E(f_n - f_{n+2})^2 \leqq \varepsilon^2, \ldots\};$$

E_n est un ensemble fermé; E est la somme des E_n.

Ou bien E_1 est identique à E où il existe un point A de E ne faisant pas partie de E_1 et, puisque E_1 est fermé, on peut déterminer un intervalle I_1 contenant A et ne contenant aucun point de E_1. Ou bien, dans I_1, E et E_2 sont identiques, ou bien on peut déterminer dans I_1 un intervalle I_2 contenant *à son intérieur* des points de E et ne contenant aucun point de E_2. Ou bien, dans I_2, E et E_3 sont identiques, ou bien on peut déterminer dans I_2 un intervalle contenant des points de E et ne contenant pas de points de E_3, et ainsi de suite.

On arrivera ainsi à un I_n dans lequel E et E_n sont identiques; sans quoi, à l'intérieur de tous ces I_n, qui contiennent tous des points de E

et qui sont contenus dans ceux qui les précèdent, existerait au moins un point de E, puisque E est parfait; or, d'après la définition de ce point, il n'appartiendrait à aucun E_i, ce qui est impossible.

Soit M un point de E contenu à l'intérieur de cet I_n; autour de ce point on peut choisir un intervalle δ intérieur à I_n dans lequel l'oscillation de f_n est inférieure à ε, et puisque, dans I_n, f et f_n diffèrent de ε au plus sur E, l'oscillation de f sur E est, dans δ, inférieure à 3ε.

Ceci posé, choisissons les nombres ε_1, ε_2, ... tendant vers zéro. On peut trouver un intervalle δ_1 contenant à son intérieur des points de E et dans lequel l'oscillation f, sur E, soit inférieure à ε_1; dans δ_1, on peut trouver un intervalle δ_2 contenant à son intérieur des points de E et dans lequel l'oscillation de f, sur E, soit inférieure à ε_2, et ainsi de suite.

A l'intérieur de δ_1, δ_2, ... existe au moins un point de l'ensemble parfait E; en ce point la fonction f, étant d'oscillation inférieure à ε_i sur E, est continue sur E.

De tout cela nous concluons que :

XV. *Pour qu'une fonction soit de classe* 1 *au plus il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

Ce théorème a été démontré par M. Baire dans sa Thèse citée ([1]). Si l'on ne démontrait les propositions qui précèdent que dans la mesure où elles servent à l'établissement du théorème XV et si, comme j'en ai indiqué la possibilité, on modifiait les raisonnements de manière à ne pas utiliser les théorèmes du paragraphe V, on aurait une démonstration particulièrement simple du théorème de M. Baire. La méthode qui a servi à celui-ci pour établir son théorème est beau-

([1]) Le raisonnement primitif de M. Baire ne s'appliquait qu'aux fonctions d'une variable; l'exactitude du théorème pour le cas général restait douteuse, comme le remarquait M. Baire à la page 88 de sa Thèse.

J'ai indiqué (*Comptes rendus*, 27 mars 1899) que l'emploi d'un théorème démontré plus loin (théorème XIX) prouvait son exactitude dans tous les cas. Depuis (*Bulletin de la Société mathématique*, 1900), M. Baire a donné un raisonnement applicable au cas général.

coup plus compliquée, mais elle a l'avantage de fournir un procédé régulier permettant, par une infinité dénombrable d'opérations, de reconnaître si une fonction est ou non de classe 1.

Tout procédé opératoire relatif aux fonctions les plus générales suppose que l'on sache effectuer certaines opérations relatives à ces fonctions. Comme il n'y a aucune question, si simple qu'elle soit, que l'on puisse résoudre pour la fonction la plus générale, donnée d'une manière quelconque, tout procédé opératoire est illusoire quand on cherche à l'appliquer au cas général. Le procédé de M. Baire n'échappe pas à cette critique, car il suppose que l'on sache trouver les points de discontinuité d'une fonction sur un ensemble parfait, ce que l'on ne sait pas faire dans le cas général. Mais, comme le plus souvent on sait effectuer cette recherche, le procédé de M. Baire est pratiquement utile toutes les fois qu'il ne demande qu'un nombre fini d'opérations. Quand il exige un nombre infini d'opérations, il peut encore être utile, non plus à proprement parler comme procédé opératoire, mais comme guide du raisonnement.

Ce n'est pas là, à mon avis, l'unique avantage du procédé de M. Baire (le théorème XV lui-même permet le plus souvent de reconnaître facilement si une fonction donnée est ou non de classe 1). Mais, et l'on peut dire quelque chose d'analogue pour chaque procédé opératoire, tandis que le théorème XV montre seulement qu'il y aurait contradiction à supposer à la fois qu'une fonction est ponctuellement discontinue pour tout ensemble parfait et qu'elle n'est ni de classe 0, ni de classe 1, le procédé de M. Baire fournit une définition précise d'un ensemble sur lequel la fonction est totalement discontinue si elle n'est ni de classe 0, ni de classe 1 [1]. J'ajoute que, si l'on a pu démontrer, par les procédés de M. Baire, qu'une fonction f est de classe 1, on sait construire une suite de fonctions continues tendant vers f.

Essayons de généraliser l'énoncé de M. Baire. Le théorème XIV

---

[1] La méthode qui nous a donné le théorème de M. Baire fournit bien aussi une définition d'un tel ensemble, mais cette définition suppose connues des propriétés des fonctions de classe 1, tandis que celle que fournit le procédé de M. Baire ne suppose connues que des propriétés relatives à la classe 0.

nous apprend, nous l'avons déjà remarqué, qu'il faut renoncer à trouver sur tout ensemble parfait des points en lesquels une fonction donnée de classe $\alpha > 1$ est de classe inférieure à α. Par exemple, la fonction $\chi(x)$ (p. 140) qui est de classe 2 dans tout intervalle n'est, en aucun point, ni de classe 0, ni de classe 1. Nous serons conduit à la généralisation cherchée en utilisant des notions importantes introduites par M. Baire et qui ont conduit celui-ci à une condition nécessaire pour qu'une fonction soit représentable analytiquement, la suivante : la fonction doit être ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à l'ensemble parfait considéré.

Pour comprendre cet énoncé, quelques explications sont nécessaires. Considérons un ensemble $\mathcal{E}$ formé à l'aide de points d'un ensemble parfait E; M. Baire (Thèse, p. 65 et 67) dit qu'il est *de première catégorie par rapport à* E s'il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses sur E, soient $E_1, E_2, \ldots$ (¹). Si $\mathcal{E}$ est de première catégorie, il ne contient pas tous les points de E; en effet, appelons D_0 un intervalle contenant à son intérieur tout E et D_i un intervalle intérieur à D_{i-1} contenant à son intérieur des points de E, mais aucun point de E_i. Ces D_i peuvent être choisis de bien des manières. Leur partie commune contient au moins un point de E qui, n'appartenant à aucun E_i, n'appartient pas à $\mathcal{E}$.

Il existe donc des ensembles qui ne sont pas de première catégorie sur E; M. Baire les appelle les *ensembles de deuxième catégorie sur* E; E lui-même est un tel ensemble. Remarquons encore que, si E est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles e, l'un au moins des e est de deuxième catégorie sur E, car la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est évidemment un ensemble de première catégorie. En particulier, le complémentaire par rapport à E d'un ensemble de première catégorie sur E est un ensemble de deuxième catégorie sur E.

Une autre définition est nécessaire pour faire comprendre l'énoncé

(¹) C'est-à-dire que, quel que soit i, dans tout intervalle contenant à son intérieur des points de E, on peut trouver un autre intervalle jouissant de la même propriété et ne contenant pas de points de E_i.

de M. Baire. Nous dirons qu'une fonction f est continue sur E en un point P de E, lorsque l'on néglige les ensembles d'une certaine famille d'ensembles, s'il existe un ensemble e de cette famille tel que f soit continue en P sur l'ensemble E — (e, E). Cette définition ne présente quelque intérêt que si P est un point limite de E — (e, E). Enfin nous dirons que f est ponctuellement discontinue sur E, quand on néglige les ensembles d'une famille F, si E est l'ensemble dérivé de l'ensemble des points de E en lesquels f est continue sur E quand on néglige les ensembles de la famille F. Sans chercher pour le moment à légitimer l'énoncé de M. Baire ([1]), nous allons déduire quelques conséquences des définitions qui précèdent.

Je vais d'abord montrer que si $\mathcal{E}$ est de deuxième catégorie sur E, il existe un domaine D tel que, si Δ est un domaine quelconque contenu dans D et contenant des points de E, (Δ, $\mathcal{E}$) est de seconde catégorie sur E; ce que j'exprime en disant que, dans D, $\mathcal{E}$ est partout de seconde catégorie sur E. Considérons les intervalles I($a_p \leqq x_p \leqq b_p$), où les a_p et b_p sont rationnels. Enlevons de $\mathcal{E}$ tous les ($\mathcal{E}$, I) qui sont de première catégorie; l'ensemble enlevé est de première catégorie; l'ensemble restant $\mathcal{E}_1$ est de même catégorie que $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}$ est de seconde catégorie, il en est de même de $\mathcal{E}_1$ et alors il existe un domaine D tel que, quel que soit le domaine Δ intérieur à D, et contenant des points de E, $\mathcal{E}_1$ a des points dans Δ. Donc aucun des I intérieurs à D ou Δ et con-

---

([1]) M. Baire a démontré le théorème dont il s'agit ici, aux pages 81 à 87 de sa Thèse, pour les fonctions d'une variable et de classe 2. Depuis, M. Baire a énoncé le théorème général dans les *Comptes rendus* du 11 décembre 1899.

Je me suis un peu écarté dans le texte du langage et des définitions adoptés par M. Baire, aux pages 72 et 73, 81 et 82 de sa Thèse. M. Baire ne définit pas la continuité lorsque l'on néglige les ensembles d'une famille F, mais il dit ce que l'on doit entendre dans ces conditions par l'*oscillation de la fonction*. Si la fonction est continue, au sens du texte, l'oscillation, au sens de M. Baire, est nulle. La réciproque n'est pas toujours vraie. Elle l'est cependant si la famille F est celle des ensembles dénombrables, ou des ensembles de classe ou de rang α, ou des ensembles de première catégorie, ou des ensembles parfaits ou fermés, ou des ensembles de mesure nulle, etc. Cela m'a permis d'adopter la définition du texte suffisante pour mon objet. Cette définition n'est d'ailleurs que provisoire; elle sera complétée plus loin (p. 189).

tenant des points de E n'a été enlevé, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}$ sont de seconde catégorie dans Δ, c'est-à-dire partout de seconde catégorie dans D.

Étant donné l'ensemble $\mathcal{E}$ sur E, enlevons de $\mathcal{E}$ tous les ensembles $(\mathcal{E}, I)$ qui sont partout de seconde catégorie sur E dans I, les I étant les mêmes intervalles que précédemment. Il reste un ensemble $\mathcal{E}'$ de première catégorie sur $\mathcal{E}$. Donc tout ensemble est la somme d'un ensemble de première catégorie et d'une infinité dénombrable d'ensembles qui sont partout de seconde catégorie dans certains domaines les contenant.

Les ensembles partout de seconde catégorie et les ensembles de première catégorie sont, par suite, les éléments constituants de tout ensemble. Comme ensembles partout de seconde catégorie, nous connaissons déjà les complémentaires d'ensembles de première catégorie; cherchons ce que sont les autres. Si un ensemble est partout de seconde catégorie et a pour complémentaire un ensemble de seconde catégorie, il existe un intervalle dans lequel l'ensemble considéré et son complémentaire sont tous deux partout de seconde catégorie sur l'ensemble parfait E considéré.

M. Baire a appelé mon attention, il y a trois ou quatre ans, sur l'intérêt qu'il y aurait à nommer un ensemble A partout de seconde catégorie ainsi que son complémentaire. En effet, d'après l'énoncé de M. Baire cité précédemment, la fonction nulle aux points de A, égale à 1 aux autres points, étant totalement discontinue sur E quand on néglige les ensembles de première catégorie, ne serait pas représentable analytiquement. Concluons de là, en nous servant du théorème VI, que A ne serait pas mesurable B. Nous allons démontrer cette propriété sans nous servir de l'énoncé de M. Baire et nous en déduirons cet énoncé.

Convenons pour un instant de dire qu'un ensemble est Z s'il n'existe aucun intervalle dans lequel cet ensemble et son complémentaire soient tous deux partout de seconde catégorie. Si un ensemble est Z, son complémentaire, par rapport à l'ensemble parfait E à l'aide des points duquel on forme les ensembles que nous considérons, est aussi Z. La somme S d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles M, qui sont Z, est aussi Z; car, si S est partout de seconde catégorie dans l'intervalle I, l'un des M est de seconde catégorie dans

I; par suite, il existe dans I un intervalle I_1 dans lequel l'un des M est partout de seconde catégorie, le complémentaire de M n'est pas de seconde catégorie dans I_1, celui de S n'est donc pas partout de seconde catégorie dans I. Cette propriété, appliquée aux complémentaires des ensembles M, nous montre que la partie commune à un nombre fini ou à une infinité dénombrable d'ensembles M, qui sont Z, est aussi Z [1].

En résumé, les ensembles formés par les deux opérations I et II précédemment étudiées, à partir d'ensembles qui sont Z, sont aussi des ensembles qui sont Z. Tout ensemble contenu dans l'ensemble parfait E et qui est mesurable B est la partie commune à E et à un ensemble mesurable B; par suite, c'est un ensemble obtenu par les deux opérations citées, à partir des ensembles (E, I) où I est un intervalle quelconque. Un ensemble (E, I) est un ensemble parfait contenu dans E; un tel ensemble ne peut être partout dense sur E dans un certain intervalle que s'il est identique à E dans cet intervalle; par suite, un ensemble (E, I) est toujours Z. Donc tous les ensembles mesurables B, contenus dans E, sont Z. C'est ce que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Lorsqu'un ensemble $\mathcal{E}$, *mesurable* B *et formé à l'aide de points d'un ensemble parfait* E, *est de seconde catégorie sur* E, *il existe un intervalle contenant des points de* E *et dans lequel le complémentaire de* $\mathcal{E}$ *par rapport à* E *est de première catégorie.*

Ceci posé, soient E un ensemble parfait, f une fonction de classe α. f est, à ε près, constante sur chacun des ensembles M d'une infinité dénombrable d'ensembles de classe α au plus, d'après le théorème IV. L'un au moins des ensembles (E, M) est de seconde catégorie sur E; donc il existe un intervalle I contenant à son intérieur des points de E et dans lequel cet ensemble (E, M) est partout de seconde catégorie. Remarquons que sur (E, M) f est constante à ε près dans I et que l'ensemble négligé [I, E — (E, M)] est de première catégorie sur E.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{1}$ et faisons-lui correspondre, comme il vient d'être

---

[1] Je ne sais pas s'il existe des ensembles qui ne sont pas Z.

dit. un intervalle I_1 et un ensemble M_1; prenons ensuite $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et faisons-lui correspondre I_2 intérieur à I_1 et un ensemble M_2; à $\varepsilon = \frac{1}{3}$ correspondra I_3 intérieur à I_2 et M_3, etc. A l'intérieur de tous ces intervalles existe au moins un point P de E; en P, f est, à ε près, continue quand on néglige l'ensemble de première catégorie N

$$N = [I_1, E - (E, M_1)] + [I_2, E - (E, M_2)] + \ldots;$$

donc :

XVI. *Toute fonction représentable analytiquement est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait.*

C'est l'énoncé de M. Baire.

La démonstration précédente montre que l'ensemble négligé est mesurable B, elle fournit même une limite supérieure de sa classe, mais cela est de peu d'intérêt. Soient, en effet, $N'_1, N'_2, \ldots$ les ensembles partout non denses sur E dont la somme est l'ensemble N négligé, la fonction f est encore continue en P si l'on néglige l'ensemble

$$(N_1 + N'_1) + (N_2 + N'_2) + \ldots,$$

lequel, étant la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, partout non denses sur E, est de classe 2 au plus et est de première catégorie par rapport à E.

Maintenant une question très importante se pose : la condition nécessaire fournie par le théorème XVI est-elle suffisante ? Et, si elle ne l'est pas, existe-t-il des fonctions qui n'y satisfont pas? Je n'essaierai pas de répondre à ces difficiles questions; il me suffit d'avoir montré par les considérations précédentes, très incomplètes, que des raisonnements simples, de la nature de ceux qui m'ont servi dans les précédents paragraphes, permettent d'obtenir certains des résultats publiés par M. Baire.

La condition suffisante pour qu'une fonction soit de classe α au plus que donne le théorème XIV, condition qui est évidemment nécessaire,

peut être considérée comme la généralisation du théorème XV, donnée par M. Baire, malgré la différence des énoncés. Il n'est pas difficile, d'ailleurs, de donner un énoncé analogue à celui du théorème XV et convenant à tous les cas. Pour arriver à un tel énoncé, je reprends la définition de la continuité en un point P, quand on néglige les ensembles d'une famille F. Dans l'application de cette définition, on peut faire deux conventions distinctes :

1° Celle qui a été faite jusqu'ici et d'après laquelle, quelle que soit P, on néglige un ensemble quelconque de la famille F, *contenant ou non* P;

2° Celle d'après laquelle, pour définir la continuité en P, on néglige un ensemble de la famille F *ne contenant pas* P.

Ces deux conventions sont évidemment distinctes; la fonction $\chi(x)$, page 140, est partout continue, quand on néglige les ensembles dénombrables avec la convention 1°, elle ne l'est que pour les valeurs irrationnelles de x avec la convention 2°; la continuité, quand on néglige les ensembles finis (contenant un nombre fini de points), est la continuité ordinaire si l'on fait la convention 2°, avec la convention 1° c'est la continuité ordinaire dans l'ensemble des points autres que celui que l'on considère. La convention 1° permet de définir ce que l'on pourrait appeler *la continuité autour de* P, la convention 2° permet de définir ce que nous appellerons maintenant *la continuité en* P [1].

Avec la convention nouvelle que nous venons de faire, le théorème XVI n'est plus démontré; mais il est facile de compléter la démonstration précédente.

Remarquons d'abord que les points d'un ensemble M qui ne sont pas *intérieurs* à un intervalle dans lequel M est partout de seconde catégorie forment un ensemble de première catégorie, d'après la décomposition d'un ensemble quelconque en ensembles de première caté-

---

[1] Je rappelle (*voir* la note de la page 185) que le langage que j'ai adopté est différent de celui choisi par M. Baire. J'ai seulement traduit dans un langage voisin de celui que j'adopte définitivement une propriété donnée par M. Baire. J'insiste d'ailleurs sur la différence entre les deux conventions citées, parce que l'une d'elles seulement conduit à un énoncé général fournissant immédiatement le théorème XV comme cas particulier.

gorie et en ensembles partout de seconde catégorie. Ceci posé dans la démonstration du théorème XVI, à chaque nombre ε nous avons fait correspondre une infinité dénombrable d'ensembles M. Les points Q de E, qui ne sont pas intérieurs à un intervalle dans lequel l'un des (E, M) contenant Q est partout de seconde catégorie sur E, forment un ensemble $E(\varepsilon)$ de première catégorie sur E. L'ensemble $e = E\left(\frac{1}{1}\right) + E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots$ est donc de première catégorie sur E et il existe des points de E n'appartenant pas à e.

Soit P l'un de ces points, j'appelle M_k l'un des M, correspondant à $\varepsilon = \frac{1}{k}$, et partout de seconde catégorie dans un certain intervalle contenant P à son intérieur. J'appelle I_k cet intervalle. Il est évident que l'on peut se servir des intervalles I_k et des ensembles M_k comme de ceux qui ont été définis précédemment; le théorème XVI est donc démontré [1].

Supposons maintenant que, au lieu d'invoquer le théorème IV, pour la démonstration du théorème XVI, nous nous soyons servi du théorème X, les ensembles M sont alors de rang α au plus [2], ainsi que les (E, M), puisque E est de rang 1. Soit A l'un des ensembles (E, M) de première catégorie sur E; il est la somme des ensembles B_1, B_2, ..., partout non denses sur E, donc aussi la somme des ensembles $(A, B_1 + B'_1)$, $(A, B_2 + B'_2)$, ... partout non denses sur E. Or $B_i + B'_i$ est fermé, donc de rang 1, A est de rang α au plus, $(A, B_i + B'_i)$ est de rang α au plus. Et nous pouvons supposer que tous ceux des (E, M) de première catégorie que nous rencontrerons seront remplacés par une infinité dénombrable d'ensembles de rang α

---

(1) La nature particulière des ensembles M_k n'intervient pas, c'est parce que la propriété démontrée n'est qu'un cas particulier de la suivante que l'on vérifiera sans peine : Si, en négligeant les ensembles de première catégorie sur un ensemble parfait E, une fonction est ponctuellement discontinue sur E lorsque l'on adopte l'une des conventions 1° et 2°, elle l'est aussi lorsque l'on adopte l'autre convention.

Il n'y a donc en réalité aucune différence entre les deux sens de l'énoncé XVI

(2) Au lieu de supposer f constante, à ε près, sur chaque M, on peut supposer que f est, à ε près, de classe inférieure à α. Cela permet de donner au théorème XVII une autre forme.

au plus, partout non dense sur E. Dès lors le point P jouit de la propriété qui intervient dans la définition suivante :

Une fonction est dite continue (α) sur l'ensemble parfait E, au point P de E, *si, à tout nombre positif* ε, *on peut faire correspondre un intervalle contenant* P *à son intérieur, dans lequel* E *peut être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de rang* α *au plus, sur chacun desquels* f *est constante à* ε *près et qui sont tous, sauf l'un d'eux* contenant P, *partout non denses sur* E.

En un tel point P, d'après X, f est de classe α au plus sur E ; de plus f est continue quand on néglige les ensembles de première catégorie sur E. La réciproque est vraie, je ne m'en servirai pas. Remarquons encore que la continuité (1) est la continuité ordinaire, et cela grâce à l'emploi de la convention 2°.

Lorsque E sera le dérivé de l'ensemble des points où f est continue (α) sur E, nous dirons que f est ponctuellement discontinue (α) sur E.

Avec ces définitions, en tenant compte du théorème XIV, nous pouvons énoncer une proposition contenant les théorèmes XV et XVI comme cas particuliers.

XVII. *Pour qu'une fonction soit de classe* α *au plus, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue* (α) *sur tout ensemble parfait.*

VII. — Relations entre différentes familles de fonctions.

Fonctions définies analytiquement. — On sait que, un ensemble E de points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant donné, on appelle *projection de cet ensemble sur la variété* $x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_n = 0$ l'ensemble e de tous les systèmes de valeurs associées $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$. Je vais démontrer que, *si* E *est mesurable* B, *sa projection l'est aussi.*

Cela est évident si E est un intervalle, car alors e en est un aussi. Or tout ensemble mesurable B se déduit d'intervalles par l'application

répétée des opérations I et II′, lesquelles se conservent en projection [1]; la proposition est établie.

Ceci posé, considérons des relations analytiques

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p) = 0.$$

Les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ étant exprimables analytiquement par hypothèse, l'ensemble des points où toutes ces fonctions sont nulles à la fois est mesurable B. La partie de cet ensemble pour laquelle on a $\alpha \leqq y_1 \leqq \beta$ est donc mesurable B ainsi que sa projection sur la variété $y_1 = y_2 = \ldots = y_p = 0$, et cela quels que soient α et β. Donc si, à un point de la variété indiquée, contenu dans un certain domaine D, correspond au plus une valeur y_1, c'est-à-dire si les relations données définissent, dans D ou dans un certain ensemble contenu dans D, une fonction implicite $y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à une seule détermination, cette fonction est mesurable B, d'où le théorème XVIII.

XVIII. — *Une fonction définie implicitement à l'aide d'expressions analytiques est exprimable analytiquement d'une manière explicite.*

J'ai supposé, comme on le fait toujours, que les relations $f_i = 0$ sont en nombre fini; la proposition précédente est encore vraie si l'on définit une infinité dénombrable de fonctions implicites y_i à l'aide d'une infinité dénombrable de relations $f_i = 0$. En modifiant légèrement la méthode, qui nous a permis d'affirmer la possibilité de construire tout ensemble mesurable B à partir d'intervalles à l'aide des deux opérations I et II′, et celle qui nous a conduit au théorème VI, on aura des raisonnements n'utilisant pas la notion de classe et applicables lorsqu'il y a une infinité dénombrable de variables. Le théorème XVIII, pour le cas où l'on définit simultanément une infinité dénombrable de fonctions implicites, s'ensuit immédiatement.

A ce théorème on en peut rattacher d'autres sur les fonctions à plu-

---

[1] Cela ne serait pas vrai pour l'opération II.

sieurs déterminations. J'indique seulement la nature de ces propositions.

Supposons qu'on dise qu'une fonction à plusieurs déterminations est mesurable B quand, quels que soient a, b et l'entier n, l'ensemble des points, où n déterminations, et n seulement, satisfont à l'inégalité $a \leqq f \leqq b$, est mesurable B. On s'assurera facilement qu'il est nécessaire et suffisant qu'une fonction à un nombre fini ou à une infinité dénombrable de déterminations soit mesurable B pour qu'on puisse définir simultanément toutes ces déterminations par une relation analytique entre la fonction et les variables. Bien entendu, une telle relation ne définira la fonction qu'implicitement si, comme je l'ai supposé jusqu'à présent, on n'admet dans les expressions analytiques que les seuls signes $+$, $\times$, lim. Mais, si l'on y adjoint un signe d'opération non uniforme, il n'en est plus nécessairement ainsi. Par exemple, si l'on emploie le signe $\sqrt[2]{\ }$, on pourra représenter explicitement, par une seule expression analytique, toutes les déterminations d'une fonction mesurable B pourvu que le nombre de ces déterminations soit toujours une puissance de 2 ou qu'il y ait une infinité dénombrable de déterminations. C'est, en un certain sens, une généralisation du théorème XVIII.

Pour démontrer ce théorème nous avons utilisé une remarque sur les projections des ensembles. En la précisant et en la généralisant nous pourrons en déduire de nouvelles conséquences.

Relations entre les fonctions de plusieurs variables et les fonctions d'une seule variable. — Considérons la transformation T

$$(\mathrm{T})\qquad X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad X_p = X_p(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

définie à l'aide des fonctions X_i continues dans le domaine d de l'espace $x_1, x_2, \ldots, x_n$; et supposons qu'elle transforme le domaine d en un domaine D de l'espace $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Ces transformations sont bien connues si $n = p$; le passage d'un ensemble à sa projection définie par

$$X_1 = x_1, \qquad X_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad X_p = x_p$$

fournit un exemple de ces transformations pour le cas $n > p$. M. Peano a donné le premier un exemple du cas $n < p$; il a indi-

qué en effet comment on pouvait construire une courbe remplissant un intervalle I (*Math. Annalen*, t. XXXVI) (¹), si cette courbe est définie par

$$X_1 = X_1(t), \qquad X_2 = X_2(t), \qquad \ldots, \qquad X_p = X_p(t);$$

ces formules définissent une transformation de la nature considérée entre l'intervalle I (à p dimensions) et un intervalle (à une dimension) de l'axe des t.

Soit a un point de d, T lui fait correspondre un point A bien déterminé, le transformé de a. A est en général le transformé de plusieurs points que j'appelle *les homologues de* a. Un ensemble e de d étant donné, le transformé E de e est l'ensemble des transformés des points de e; je désignerai par e_1 l'ensemble de tous les points dont les transformés font partie de E; en d'autres termes e_1 contient les points de e et leurs homologues; je dirai que e_1 est l'ensemble complet correspondant à E. Cherchons des relations entre les classes des ensembles e, E, e_1.

Supposons que e soit fermé, c'est-à-dire soit F de classe o. Soit M un point de D limite des points M_1, M_2, ... de E, soient m_1, m_2, ... des points de e qui ont respectivement pour transformés M_1, M_2, ... Soient enfin m un de leurs points limites, et m_{k_1}, m_{k_2}, ... des points de la suite m_1, m_2, ..., tendant vers m, je dis que m admet M pour transformé. En effet les fonctions X_1, X_2, ..., X_p, qui figurent dans la transformation T, étant continues, $X_i(m)$ est la limite de $X_i(m_{k_i})$; or $X_i(m_{k_i})$ étant la coordonnée X_i de M_{k_i}, $X_i(m)$ sera la coordonnée X_i de M et M est bien le transformé de m. L'ensemble E est fermé.

Donc, si e est F de classe o, E est F de classe o. Il faut bien remarquer que cela n'est plus vrai en général si l'on remplace F par O; en

(¹) *Voir* aussi une note de M. Hilbert (*Math. Ann.*, t. XXXVIII) et la page 44 de mes *Leçons sur l'intégration*. — La transformation qui a servi au début du paragraphe I pour définir un domaine à partir d'un intervalle, transforme une courbe remplissant l'intervalle en une courbe remplissant le domaine. Tout domaine peut donc être rempli par une courbe. Ces courbes permettraient, si l'on y voyait avantage, de ne s'occuper que des transformations T où $n = 1$.

d'autres termes, si e est ouvert il n'en résulte pas que E soit aussi ouvert. De l'étude des ensembles F on ne peut pas conclure pour les ensembles O parce que, si e et g sont complémentaires par rapport à d, il n'est pas vrai en général que E et G soient complémentaires par rapport à D; la somme $E + G$ est bien identique à D, mais E et G ont en général des points communs.

Supposons que e soit O de classe 0 ou 1. Alors e est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés et dont les transformés sont par suite aussi fermés. Mais la somme de ces transformés est identique à E, donc E est O au plus de classe 1.

Supposons que e soit F de classe 1 ou 2. Alors e est la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles O de classe 1 au plus *et que l'on peut supposer contenus les uns dans les autres*. Dans ces conditions leurs transformés, qui sont O de classe 1 au plus, admettent E pour partie commune; donc E est F de classe 2 au plus.

En continuant ainsi on voit que, *si e est* F *de classe $2n$ au plus,* E *est* F *de classe $2n$ au plus; si e est* O *de classe $2n+1$ au plus,* E *est* O *de classe $2n+1$ au plus*. En particulier, si e est F ou O de classe inférieure à ω, E est aussi F ou O de classe inférieure à ω.

Si e est de rang ω, il est la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles F des classes inférieures à ω, que l'on peut supposer contenus les uns dans les autres, et dont les transformés, qui sont F des classes inférieures à ω, ont pour partie commune E. E est donc de rang ω.

Si e est le complément d'un ensemble de rang ω, il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles O des classes inférieures à ω, lesquels ont pour transformés des ensembles O des classes inférieures à ω; leur somme E est donc le complémentaire d'un ensemble de rang ω.

Si e est F de classe ω, il est la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles complémentaires d'ensembles de rang ω, contenus les uns dans les autres. Alors E est la partie commune des transformés de ces ensembles, donc E est de classe ω au plus.

Si e est O de classe ω, il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de rang ω, donc E est O de classe ω au plus.

A partir de là, en raisonnant par récurrence, on verra que, *si e*

est F (*ou* O) *de classe* $\alpha \geqq \omega$, E *est* F (*ou* O) *de classe* α *au plus* [1].

Pour le passage de e_1 à E les conclusions précédentes s'appliquent, mais on peut aller plus loin. Soit g_1 le complémentaire de e_1 par rapport à O, g_1 est évidemment l'ensemble complet correspondant au complémentaire G de E par rapport à D. Si e_1 est F de classe $\alpha \geqq \omega$ ou de classe finie et paire, E est, on le sait, un ensemble F de classe α au plus. Si e_1 est F de classe finie et impaire α, g_1 est O de classe impaire α, donc G est, on le sait, un ensemble O de classe α au plus et par suite E est F de classe α au plus. Donc, dans tous les cas, E est au plus de la même classe que e_1 [2].

Ce résultat peut s'interpréter autrement. Soit F $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ une fonction, la transformation T lui fait correspondre une fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F[X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_p(x_1, \ldots, x_n)].$$

Comme $E(a \leqq f \leqq b)$ est le correspondant complet de $E(a \leqq F \leqq b)$, f est au moins de la classe F.

Mais, au sujet de la fonction $F[X_1(x_1 \ldots), \ldots]$ composée à l'aide des fonctions continues $X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_p(x_1, \ldots, x_n)$ et de la fonction $F(X_1, X_2, \ldots, X_p)$, nous pouvons démontrer une propriété analogue au théorème I, savoir que la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est au plus de la classe de la fonction $F(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Dire que F est d'une classe déterminée, c'est dire en effet que l'on peut construire cette fonction à l'aide d'un certain procédé opératoire à partir de fonctions continues $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Pour substituer dans F les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ données par (T), il suffit de faire la substitution dans les Φ, ce qui donne des fonctions continues $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, puis d'employer, à partir de ces nouvelles fonctions, le même procédé opératoire qu'avant la substitution.

Comme il n'est pas démontré qu'après la substitution ce procédé

---

(1) En appliquant ces résultats au cas où E est une projection de e, on pourrait préciser la nature des fonctions définies implicitement par des relations obtenues en égalant à zéro des fonctions de classes connues.

(2) Je reviens ici au langage abrégé dans lequel *ensemble* F *de classe* α est remplacé par *ensemble de classe* α.

opératoire est le plus simple possible, nous pouvons seulement conclure que f est au plus de la classe de F.

Ce résultat, rapproché du précédent, montre que :

La transformation T *fait correspondre à tout ensemble* E *contenu dans* D *et de classe* α *un ensemble complet* e *contenu dans* d *et exactement de classe* α.

Et aussi que :

La transformation T *fait correspondre à toute fonction* $F(X_1, \ldots, X_p)$ *des variables* $X_1, X_2, \ldots, X_p$, *qui est de classe* α, *une fonction*

$$F[X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots, X_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *qui est exactement de classe* α.

Le fait que D est un domaine n'est presque jamais intervenu; supprimons cette condition, alors D est un ensemble parfait. La démonstration du premier des deux énoncés précédent reste applicable, occupons-nous du second. Convenons de dire qu'une fonction est de classe α sur D s'il existe une fonction partout définie, qui soit de classe α, qui se réduise sur D à la fonction donnée et s'il n'en existe pas de classe inférieure à α. Alors il est évident que, si F est de classe α, f est de classe α au plus.

Si f est de classe o, la fonction F, d'où dérive f, et qui n'est connue que sur D, est continue d'après les résultats qui précèdent; mais puisqu'on sait qu'il existe une fonction continue, partout définie, se réduisant sur D à une fonction continue donnée, F est, sur D, de classe o au plus.

Si f est de classe $\alpha \geq 1$, la fonction F, définie sur D, est telle que $E(a \leq F \leq b)$ est toujours de classe α au plus, mais l'ensemble complémentaire de D, étant de classe 1, est aussi de classe α au plus, Donc la fonction égale à F sur D, à o pour les autres points est de classe α au plus, F est, sur D, de classe α au plus.

Les deux énoncés trouvés sont donc exacts dans tous les cas où d est

un domaine ([1]). La seule application que j'en veux faire est la suivante : Considérons une courbe C définie à l'aide de fonctions continues d'un paramètre t variant dans un intervalle d; soit

$$X_1 = X_1(t), \qquad X_2 = X_2(t), \qquad \ldots, \qquad X_p = X_p(t)$$

cette courbe. A toute fonction $F(X_1, X_3, \ldots, X_p)$ définie sur elle, correspond une fonction $f(t) \equiv F[X_1(t), X_2(t), \ldots, X_p(t)]$ définie dans d. La classe de cette fonction $f(t)$ est ce que nous appellerons *la classe de* F *sur la courbe* C. Il est évident que cette classe est bien attachée à la courbe C et qu'elle ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie, c'est-à-dire qu'elle reste la même si, dans les fonctions $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_p(t)$, on substitue une fonction $t(\theta)$ continue et variant toujours dans le même sens. Mais l'extension que nous avons donnée aux énoncés précédents permet d'aller plus loin : la classe de F sur la courbe C étant la classe de F sur l'ensemble parfait D des points de C reste la même si l'on substitue à C une autre courbe Γ assujettie à la seule condition d'avoir un même ensemble de points que C. Et cela revient à substituer, dans les coordonnées des points de C, des fonctions $t(\theta)$ qui sont discontinues, à plusieurs déterminations, l'ensemble de ces déterminations pouvant même avoir la puissance du continu pour certaines valeurs de θ.

Si l'on ne s'occupe pas de ces généralisations, on ne peut conclure pour toutes les courbes, mais on peut toujours conclure pour les courbes qui remplissent un domaine, et cela suffit pour légitimer le théorème XIX :

XIX. *Pour qu'une fonction soit de classe α dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit de classe α au plus pour chaque courbe du domaine et qu'elle soit effectivement de classe α pour une courbe du domaine.*

Cette courbe particulière peut d'ailleurs être prise indépendamment

([1]) Ils sont vrais aussi si d est un ensemble parfait, mais cette généralisation nous est tout à fait inutile.

Lorsque d est un domaine, D est un ensemble parfait, mais il faut bien remarquer que ce n'est pas un ensemble parfait quelconque.

de la fonction considérée, il suffit de prendre une courbe remplissant le domaine [1].

Il est bien évident que, si l'on veut déduire la classe d'une fonction dans un domaine de la classe de cette fonction sur une courbe, toujours la même, il faut que cette courbe passe par tous les points du domaine. Mais on peut préférer à l'emploi de cette courbe, unique mais nécessairement compliquée, l'emploi d'une famille de courbes plus simples.

Je ne sais pas s'il est possible de nommer une telle famille, mais je vais montrer par un exemple simple que la famille des courbes analytiques ne répond pas à la question [2].

Considérons trois circonférences tangentes intérieurement en un point A. Soient C_1 la plus grande, C_2 la circonférence moyenne, C_3 la plus petite. Soit $f(x, y)$ une fonction, nulle sur C_1, C_3, à l'extérieur de C_1, à l'intérieur de C_3; égale à 1 sur C_2 sauf en A; linéaire sur chaque rayon de C_3, entre C_1 et C_2 d'une part, entre C_2 et C_3 d'autre

---

[1] J'ai énoncé ce théorème dans une Note des *Comptes rendus* (27 mars 1899) et j'en ai déduit qu'on pouvait appliquer à tous les cas l'énoncé du théorème XV, démontré par M. Baire pour les fonctions d'une variable. Ma démonstration primitive était très différente comme forme de celle du texte; en réalité, les propriétés utilisées étaient les mêmes. J'employais encore les relations entre un ensemble, son transformé et l'ensemble complet correspondant. Seulement, au lieu de considérer une courbe quelconque remplissant le domaine, je ne me servais que des courbes de Peano dont l'ensemble des points multiples est particulièrement simple.

[2] Il suffit qu'une fonction soit de classe $\alpha = 0$ sur toute droite $x =$ const. et sur toute courbe $y = f(x)$ pour qu'elle soit de classe $\alpha = 0$ dans tout le plan (x, y). Je ne sais pas si cette propriété est encore exacte pour $\alpha > 0$; si elle l'était, on aurait là une famille simple répondant à la question. Cette famille serait d'autant plus intéressante qu'elle ne comprend que les courbes qu'on étudie ordinairement, l'étude d'une courbe $y = f(x)$ étant souvent beaucoup plus facile que celle d'une courbe quelconque. Par exemple, M. Baire a démontré qu'une fonction $F(x, y)$, continue en x et en y, définit sur chacune de ces courbes une fonction de classe 1; il est fort possible que les méthodes de M. Baire puissent être étendues au cas des courbes quelconques, il n'en est pas moins intéressant de se demander si l'on a le droit de conclure du résultat de M. Baire que F est de classe 1, comme cela sera démontré plus loin.

part. Il est évident que $f(x, y)$ est discontinue en A, et pourtant elle est continue sur toute droite du plan.

Faisons une construction analogue en remplaçant C_1, C_2, C_3 par des courbes qui, au voisinage de A, sont transcendantes et ont un contact d'ordre infini. On peut supposer, par exemple, que ces arcs de courbes ont pour équations

$$y = f_1(x), \qquad y = f_2(x), \qquad y = f_3(x),$$

et que l'on a

$$f_1\ (0) = f_2\ (0) = f_3\ (0) = a_0,$$
$$f_1^{p}\ (0) = f_2^{(p)}(0) = f_3^{(p)}(0) = a_p\,p!,$$

f_i^p désignant la dérivée $p^{\text{ième}}$ de f_i, les a_0 et les a_p étant choisis à l'avance de façon que la série $a_0 + \Sigma a_p x^p$ ne soit pas convergente pour $x \neq 0$. Alors la fonction $f(x, y)$ est continue sur toute courbe analytique, et cependant elle est discontinue en A. Bien entendu, une série uniformément convergente de telles fonctions convenablement choisies donnerait *une fonction continue sur tout arc analytique et cependant discontinue dans tout domaine.*

Les fonctions ainsi construites sont de classe 1; il est facile de le voir de bien des manières et cela résultera d'un théorème qui va être démontré; je vais cependant le démontrer pour la première fonction $f(x, y)$ construite, ce qui me conduira à une série intéressante. De A comme centre, je décris la circonférence Γ_n de rayon $\frac{1}{n}$; soit φ_n une fonction continue égale à f en tout point où $f = 0$, égale à f à l'extérieur de Γ_n et comprise entre 0 et 1; f est la limite de φ_n, donc f est de classe 1, mais, de plus, la suite obtenue qui n'est pas partout uniformément convergente est cependant uniformément convergente sur toute droite. Cette suite peut évidemment être remplacée par une série de polynomes, et ce qui a été dit de la première des fonctions $f(x, y)$ peut l'être des autres, de sorte qu'*il existe des séries de polynomes uniformément convergentes sur tout arc analytique sans être uniformément convergentes dans aucune aire.*

Toutes les fonctions $f(x, y)$ que nous venons de construire sont de classe 1; avant de rattacher cela à un théorème général, je montre

que, contrairement à ce que pourraient faire penser ce théorème et les exemples précédents, il ne suffit pas de connaître la classe d'une fonction sur toute droite du plan pour connaître une limite supérieure de la classe de cette fonction. En effet, une fonction partout nulle, sauf peut-être pour les points d'une circonférence, est de la classe 1 au plus sur toute droite, elle peut être cependant de classe quelconque, ou même échapper à tout mode de représentation analytique.

Fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles.

XX. *Une fonction de n variables, continue par rapport à chacune d'elles, est de classe $n-1$ au plus.*

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une telle fonction et supposons-la définie dans un intervalle, ce qui ne restreint pas la généralité, puisque, si f n'est définie que dans D, il est possible de la définir à l'extérieur de D en respectant les continuités; cela suppose toutefois que f est continue par rapport aux variables en tous les points frontières de D, mais cela est admis implicitement dans l'énoncé.

Supposons donc que f est définie pour $a \leqq x_1 \leqq b$ et divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales à l'aide des points $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$. Soit φ_n la fonction égale à f quand x a l'une de ces valeurs a_i et variant linéairement quand, $x_2, x_3, \ldots, x_n$ restant constantes, x_1 varie de a_i à a_{i+1}. φ_n est une fonction continue par rapport aux ensembles (x_1, x_2), $(x_1, x_3), \ldots, (x_1, x_n)$ et de plus φ_n tend vers f, quand n augmente indéfiniment.

Opérons sur φ_n comme sur f en faisant jouer à x_2 le rôle de x_1: nous verrons que φ_n est la limite d'une suite convergente de fonctions continues en (x_1, x_2, x_3), $(x_1, x_2, x_4), \ldots, (x_1, x_2, x_n)$. Nous opérerons sur ces nouvelles fonctions comme sur f et φ_n en faisant jouer à x_3 le rôle de x_1 et x_2, et ainsi de suite. Au bout de $n-1$ opérations, nous arriverons à des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables et à partir desquelles f s'obtient par $n-1$ passages successifs à la limite; donc f est de classe $n-1$ au plus [1].

---

[1] J'ai déjà donné cette démonstration dans une Note du *Bulletin des Sciences mathématiques* (*Sur l'approximation des fonctions*, novembre 1898).

On peut se demander, il est vrai, si la limite supérieure trouvée pour la classe peut être effectivement atteinte. La réponse est affirmative; nous allons démontrer, en effet, que :

XXI. *Si $f(t)$ est une fonction de classe n, il existe une fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ continue par rapport à chacune de ses $n+1$ variables et telle que $f(t)$ soit identique à $\varphi(t, t, \ldots, t)$.*

En d'autres termes, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ se réduit à f sur une certaine droite.

1° $n = 1$. — On a alors

$$f(t) = \lim_{n=\infty} f_n(t),$$

les $f_n(t)$ étant continues. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ des nombres décroissants et tendant vers zéro, et soit η_n un nombre tel que, dans un intervalle quelconque de longueur η_n, l'oscillation de f_n soit inférieure à ε_n; je suppose, de plus, que les η_n sont choisis décroissant avec $\frac{1}{n}$ et tendant vers zéro.

Nous définissons φ par les égalités

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, x_1), \qquad \varphi(t, t) = f(t)$$

et

$$\varphi(x_1, t) = f_{n+1}(t) + [f_n(t) - f_{n+1}(t)] \frac{x_1 - t - \eta_{n+2}}{\eta_{n+1} - \eta_{n+2}},$$

quand

$$t + \eta_{n+2} < x_1 \leqq t + \eta_{n+1}.$$

Il est évident que, pour $x_1 \geqq x_2$, φ est continue en x_1; montrons que φ est continue en x_2. Donnons à x_1 une valeur constante, lorsque l'on a

$$x_1 - \eta_{n+1} \leqq x_2 < x_1 - \eta_{n+2},$$

φ est comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres suivants :

$$f_n + \varepsilon_n, \quad f_n - \varepsilon_n, \quad f_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, \quad f_{n+1} - \varepsilon_{n+1},$$

et, puisque tous ces nombres tendent vers f, φ, qui est évidemment continue en x_2 pour $x_2 < x_1$, l'est aussi pour $x_2 = x_1$.

Ce raisonnement deviendrait plus simple encore si l'on traduisait en langage géométrique la construction indiquée analytiquement [1].

2° *n quelconque.* — On peut maintenant passer d'une valeur de n à la valeur immédiatement supérieure à l'aide d'un raisonnement que je me contenterai d'exposer dans le cas particulier du passage de $n = 1$ à $n = 2$. Cela me permettra d'employer le langage géométrique et de bien mettre en évidence la propriété des domaines à plus de deux dimensions qui est fondamentale dans ce raisonnement.

Par la droite D, $x = y = z$, faisons passer les trois plans Dx, Dy, Dz qui contiennent respectivement Ox, Oy, Oz. Ces trois plans divisent l'espace en six domaines indéfinis, limités chacun par deux faces d'un dièdre. Entre ces systèmes de deux faces, menons, par D, deux plans; par exemple, traçons les six plans Π passant par D et faisant 20° avec l'un des plans Dx, Dy, Dz. Les plans Π, Dx, Dy, Dz divisent l'espace en dix-huit dièdres de 20° d'angle; les plans Π seuls divisent l'espace en douze dièdres : les uns, les dièdres A de 40° d'angle, sont tels qu'ils contiennent les parallèles à l'une des directions de l'un des axes, menées par les points de D; les autres, les dièdres B de 20° d'angle, ne contiennent aucune de ces parallèles.

Si l'on veut construire une fonction $\varphi(x, y, z)$ continue en x, en y et en z et égale sur D à une fonction donnée, et si l'on sait résoudre cette question pour chaque domaine A, on saura évidemment la résoudre pour tout l'espace; en effet, si l'on donne à $\varphi(x, y, z)$ les valeurs déjà connues, quand (x, y, z) est point d'un domaine A, il sera facile de définir $\varphi(x, y, z)$ dans les domaines B tout en respectant les continuités, parce qu'il n'y aura plus à s'occuper de la continuité aux points de D.

Il suffit donc de résoudre la question pour un domaine A et, dans un tel domaine, on n'a à se préoccuper, pour les points de D, que de la continuité par rapport à une seule des variables. Cette simplification résulte, comme on vient de le voir, de la possibilité d'une certaine

---

[1] En 1899, M. Baire m'avait communiqué une démonstration due à M. Volterra et s'appliquant au cas de $n = 1$.

division de l'espace; une division analogue est possible pour les espaces à plus de trois dimensions, elle est impossible pour l'espace à deux dimensions.

Pour démontrer le théorème dans le cas de $n = 2$, il suffit de définir la fonction φ, dans un domaine A, l'un des dièdres précédemment défini ou tout autre domaine possédant la propriété remarquable indiquée. Supposons que ce domaine contienne les parallèles menées par les points de D à la direction positive de Ox.

Soit $f(t) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(t, t)$ la fonction donnée; $f_n(u, v)$ étant une fonction continue par rapport à chacune des deux variables u, v. Désignons par P_1, P_2, ... des plans parallèles entre eux et à D, se rapprochant constamment de D, dont la distance à D tend vers zéro, coupant le domaine A et non parallèles à Ox. On pourra prendre pour P_n

$$2x - y - z = \frac{1}{n}.$$

La fonction $\varphi(x, y, z)$ est maintenant définie par les conditions suivantes : 1° $\varphi(x, y, z)$ est égale à $f(x)$ sur D, c'est-à-dire que l'on a $\varphi(x, x, x) = f(x)$; 2° au point de P_n, dont les coordonnées sont $\frac{1}{2}\left(y + z + \frac{1}{n}\right)$, y, z, la fonction $\varphi(x, y, z)$ est égale à $f_n(y, z)$; 3° $\varphi(x, y, z)$ est linéaire en x quand on se déplace sur une parallèle à l'axe des x entre deux plans P_i consécutifs.

Ces conditions déterminent évidemment, en tout point de A, une fonction φ remplissant les conditions imposées. Le théorème est donc établi pour $n = 2$, et l'on voit que le raisonnement se généralise facilement.

Des théorèmes XX et XXI il résulte qu'il y a identité entre les fonctions de classe n et celles qu'on obtient en donnant des valeurs égales aux variables d'une fonction de $n + 1$ variables continues par rapport à chacune d'elles. Cette identité fournit un nouveau moyen de rattacher les fonctions de classe n aux fonctions continues, qui pourrait être pris pour base d'une étude des fonctions de classe finie, et l'on verra facilement qu'en l'employant certains des théorèmes précédents s'obtiennent très facilement. M. Baire est parvenu, pour le cas de $n = 1$, à la démonstration de l'identité qui vient d'être indiquée en

cherchant simultanément les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit de première classe et pour qu'elle puisse être obtenue en faisant $x = y$ dans une fonction $f(x, y)$ continue en x et en y; il a trouvé comme réponse à ces deux questions des conditions identiques, celles qui sont fournies par le théorème XV [1].

VIII. — Exemples de fonctions.

Je vais maintenant démontrer l'existence de fonctions de toute classe et l'existence de fonctions échappant à tout mode de représentation analytique.

Un théorème de M. G. Cantor est fondamental pour notre objet : l'ensemble des fonctions a une puissance supérieure au continu. En se servant de ce théorème, page 71 de sa thèse, M. Baire a pu affirmer l'existence de fonctions qui n'appartiennent à aucune classe. Je vais reprendre ces points en précisant davantage. J'essaierai de ne jamais parler d'une fonction sans la définir effectivement; je me place ainsi à un point de vue fort analogue à celui choisi par M. Borel dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*.

Un objet est défini ou donné quand on a prononcé un nombre fini de mots s'appliquant à cet objet et à celui-là seulement; c'est-à-dire quand on a *nommé* une propriété caractéristique de l'objet. Pour donner une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on nomme généralement une propriété appartenant à tous les ensembles de nombres

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

[1] Il a été question précédemment de fonctions continues sur toutes les droites; on pourrait se demander si la classe de ces fonctions peut atteindre la même limite que lorsqu'il s'agit simplement de fonctions continues par rapport à chacune des variables; la réponse est affirmative.

En modifiant légèrement les constructions employées pour le théorème XXI, on construira une fonction de $n+1$ variables, continue sur toute droite et se réduisant, sur une courbe C, à une fonction arbitrairement donnée de classe n. La courbe C ne peut pas être prise arbitrairement; pour $n = 1$, on pourra prendre un arc de cercle; pour $n = 2$, un arc d'hélice; et, d'une manière générale, on pourra prendre pour C un arc de courbe rencontrant, en un nombre fini de points, toute variété linéaire à n dimensions.

et à ceux-là seulement; mais cela n'est nullement nécessaire, on peut nommer d'autres propriétés caractéristiques de cette fonction. C'est ce que l'on fait, par exemple, lorsque, une fonction $f(x)$ étant définie d'une manière quelconque, on dit que $F(x)$ est celle des fonctions primitives de $f(x)$ qui s'annule pour $x = 0$ (¹). C'est nommer une fonction que de dire qu'elle est égale à *zéro* ou *un* suivant que la constante d'Euler C est rationnelle ou non.

Il ne faudrait d'ailleurs pas croire qu'une fonction est nécessairement mieux définie quand on donne une propriété caractéristique de l'ensemble $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, car une telle propriété ne permet pas en général de calculer y. Par exemple, la fonction $\chi(x)$, page 140, qui admet même une représentation analytique connue, n'est pas connue pour $x = C$, bien que l'on sache calculer C avec autant de décimales que l'on veut (²) et, si nous la connaissons pour $x = \pi$, ce n'est pas son expression analytique qui nous la fait connaître.

On ne devra donc pas s'étonner si, dans la suite, je considère comme parfaitement définies et données des fonctions que je ne saurai calculer pour aucune valeur des variables; je ne connaîtrai en général rien de plus, sur ces fonctions, que leur définition; cela me permettra cependant de donner un sens beaucoup plus précis à l'énoncé de M. Cantor. Je reprends la démonstration du théorème de M. Cantor.

Convenons de dire que, une certaine famille de fonctions étant donnée, on sait réaliser une application de cette famille sur le continu lorsque, à toute fonction de la famille, on sait faire correspondre un

---

(¹) Je rappelle que, si f n'est pas bornée, on ne connait aucun procédé général permettant de reconnaître si F existe et donnant sa valeur.

(²) Il y aurait lieu de rechercher quelles sont les expressions analytiques qui fournissent réellement des procédés de calcul. La réponse à cette question dépendra évidemment de la nature des opérations que nous considérerons comme réellement effectuables.

D'une façon générale un calcul est illusoire s'il suppose que l'on effectue successivement deux passages à la limite, à moins que le second ne soit relatif à une suite uniformément convergente. Or, c'est un tel calcul que l'on aurait à effectuer pour calculer $\chi(C)$, C étant supposée donnée par la suite de ses chiffres décimaux, c'est-à-dire par une série.

ensemble de valeurs de la variable t, comprise entre 0 et 1, de manière qu'à une valeur de t corresponde une fonction au plus.

Supposons qu'une telle application soit possible pour une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions d'une variable. Définissons une fonction $F(t)$ par la condition d'être partout nulle sauf pour les valeurs de t auxquelles correspondent des fonctions de $\mathfrak{F}$ qui s'annulent pour cette valeur particulière t de la variable; alors nous prendrons $F(t) = 1$. La fonction F n'est évidemment identique à aucune des fonctions de la famille $\mathfrak{F}$ (1).

C'est ce raisonnement que l'on traduit ordinairement en disant qu'il *existe* une fonction ne faisant pas partie de $\mathfrak{F}$, ou encore que la puissance de l'ensemble des fonctions est supérieure à celle de l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{F}$. Pour être précis, nous devons seulement conclure que : *Ou bien il est impossible de nommer une application de $\mathfrak{F}$ sur le continu, ou bien il est possible de nommer une fonction* F *ne faisant pas partie de $\mathfrak{F}$.*

Ainsi, si l'on peut nommer une application, on peut nommer une fonction F; si l'on sait seulement qu'il existe une application, on doit conclure qu'il existe une fonction F. En général, on démontre l'existence d'un objet en donnant le moyen de le nommer; il n'en est cependant pas toujours ainsi, j'en donnerai plus loin un exemple en faisant cependant des réserves (2).

M. Borel, dans la Note III de ses *Leçons sur la théorie des fonctions,* cite une classe étendue de familles de fonctions pour lesquelles on peut nommer une application sur le continu : les familles de fonctions définies par des conditions dénombrables. Un ensemble dénombrable de telles familles constitue évidemment une nouvelle famille de fonctions définies par des conditions dénombrables. La famille des fonctions continues est une famille de fonctions définies par des conditions dénombrables, et l'on peut, de bien des manières, *citer* une application de cette famille sur le continu. Partant d'une de ces appli-

(1) On pourrait raisonner de même pour les fonctions de plusieurs variables, mais les théorèmes de M. Cantor et ceux qui précèdent nous permettent de nous occuper uniquement des fonctions d'une seule variable; c'est ce qui sera fait dans la suite; je supposerai même qu'il s'agit de fonctions définies dans (0, 1).

(2) Page 213. *Voir* aussi la note de la page 176.

cations et remarquant qu'une fonction de classe α est définie par une suite dénombrable convergente de fonctions de classe inférieure à α, on en déduira facilement une application particulière des fonctions de classe α au plus sur le continu. Du théorème de Cantor il résulte alors *qu'on peut nommer une fonction qui n'est ni de la classe α, ni d'une classe inférieure* [1].

Nous ne pouvons pas conclure de là l'existence de fonctions de toute classe, car nous ne savons pas si la fonction ainsi définie est représentable analytiquement et de classe supérieure à α ou si elle n'est pas représentable analytiquement. Nous allons voir qu'on peut arriver à nommer une fonction représentable analytiquement et de classe supérieure à α.

Je démontre d'abord une propriété simple des symboles de classe. *Si l'on a des symboles de classe α_1, α_2, ... décroissants, le nombre de ces symboles est certainement fini.* Supposons, en effet, qu'on puisse avoir une suite de symboles décroissants α_1, α_2, ..., et considérons l'ensemble des symboles de classe inférieurs à tous les α_i, cet ensemble E est nécessairement dénombrable puisqu'il ne contient que des symboles inférieurs à α_1, donc il existe un symbole β qui est le premier venant après tous ceux de E. β ne faisant pas partie de E est égal ou supérieur à l'un des α_i. Il ne peut être supérieur à l'un des α_i puisque tous les symboles inférieurs à β font partie de E; donc β égale l'un des α; si $\beta = \alpha_i$, la suite ne contient que i symboles, le théorème est donc démontré [2].

Supposons donné un symbole de classe α. Cela veut dire qu'on a, par un procédé quelconque, défini les symboles de classe inférieure à α. Rangeons ces symboles, qui sont en nombre *fini* ou *dénombrable*, en suite simplement infinie α_1, α_2, ..., le même symbole pouvant revenir

---

(1) Cette application particulière des propriétés des familles de fonctions définies par des conditions dénombrables, que M. Borel a données dans son Livre cité, avait été faite par M. Borel lui-même, qui m'a communiqué son raisonnement, analogue à celui du texte.

(2) Dans ce théorème il s'agit, bien entendu, de symboles ordonnés de manière qu'après chaque symbole il y ait un premier symbole déterminé et que l'ensemble ait un premier symbole; ce théorème ne veut pas dire qu'avant chaque classe il n'y a qu'un nombre fini de classes.

plusieurs fois [1]. Soit f une fonction de classe α, on peut considérer f comme la limite d'une suite convergente $f_1, f_2, \ldots$. Si α est de première espèce, je supposerai que toutes ces fonctions sont de classe $\alpha - 1$; si α est de seconde espèce, je supposerai que f_n est de classe α_{r_n}, α_{r_1} étant α_1 et α_{r_n} étant le premier des symboles $\alpha_{r_{n-1}+1}, \alpha_{r_{n-1}+2}, \ldots$, qui surpasse $\alpha_{r_{n-1}}$ [2].

Je peux considérer f_n comme la limite d'une suite convergente $f_{n,1}$, $f_{n,2}, \ldots$. Si α_{r_n} est de première espèce, je supposerai que toutes ces fonctions sont de la classe $\alpha_{r_n} - 1$; si α_{r_n} est de seconde espèce, je supposerai que $f_{n,p}$ est de la classe $\alpha_{r_{n,p}}$, $\alpha_{r_{n,1}}$ étant le premier des symboles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, inférieur à α_{r_n} et $\alpha_{r_{n,p}}$ étant le premier des symboles $\alpha_{r_{n,p-1}+1}, \alpha_{r_{n,p-1}+2}, \ldots$, qui surpasse $\alpha_{r_{n,p-1}}$ sans égaler α_{r_n}.

Les fonctions $f_{n,p}$ seront supposées définies comme limites de fonctions $f_{n,p,q}$ dont les classes seront fixées par le même procédé, et ainsi de suite. Nous pourrions toujours déduire, d'une fonction à k indices, des fonctions à $k+1$ indices ayant les k premiers indices communs avec la fonction primitive; nous serons arrêtés cependant quand nous arriverons à une fonction de classe 0. Considérons une suite de fonctions déduites les unes des autres $f_n, f_{n,p}, f_{n,p,q}, \ldots$; les classes correspondantes, qui sont inférieures à α, vont en décroissant, donc la suite ne comprend qu'un nombre fini de fonctions. Toutes les fonctions que nous définissons ont donc un nombre fini d'indices; elles forment, par suite, un ensemble dénombrable. Il faut remarquer que tout cortège d'indices ne correspond pas à une fonction; mais, un cortège d'indices étant donné, nous savons reconnaître s'il correspond à une fonction et, si oui, quelle est la classe de cette fonction.

En particulier, nous savons reconnaître quels cortèges d'indices correspondent aux fonctions de classe 0. D'après la façon dont les classes

---

[1] Si l'on voit une difficulté dans le fait que je n'indique pas d'une façon générale la loi de formation de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, et je ne puis l'indiquer puisque je ne sais pas nommer le symbole α le plus général, on pourra considérer que ce qui suit n'est applicable qu'aux symboles α qu'on aura nommés d'une façon spéciale : en nommant la loi suivant laquelle est formée la suite α_1, $\alpha_2, \ldots$.

[2] Tout cela suppose pour un instant l'existence effective des classes inférieures à $\alpha + 1$, et même l'existence de fonctions bornées appartenant à ces classes.

ont été définies, si $f_{1.p}$, où I est un certain cortège d'indices, est de classe o, la suite $f_{1.1}, f_{1.2}, \ldots$ est une suite convergente de fonctions de classe o; or une telle suite pouvant toujours être remplacée par une suite, convergeant vers la même limite, formée de polynomes dont le $p^{\text{ième}}$ est de degré p et à coefficients inférieurs à 2^p, je peux supposer que $f_{1.p}$ est un polynome de degré p et à coefficients inférieurs à 2^p. Je poserai donc

$$(1) \qquad f_{1.p} = 2^p(a_{1.p.1} + a_{1.p.2}x + \ldots + a_{1.p.p+1}x^{p+1}),$$

les a seront compris entre o et 1. Il suffit évidemment de se donner ces a et leurs indices pour que la fonction f soit déterminée.

Je vais définir les nombres a comme fonctions d'un paramètre t, pour cela je range d'abord en suite simplement infinie les cortèges d'indices correspondant aux a. Par exemple, j'adopte le procédé suivant : la suite I $(n, p, \ldots, t)$ sera placée avant la suite $I_1(n_1, p_1, \ldots, z_1)$ si la somme $n + p + \ldots + t$ est inférieure à la somme $n_1 + p_1 + \ldots + z_1$, ou si, ces deux sommes étant égales et les indices de I étant égaux à ceux de même rang dans I_1 jusqu'au $p^{\text{ième}}$ rang, le $(p+1)^{\text{ième}}$ indice de I est inférieur au $(p+1)^{\text{ième}}$ indice de I_1 [1]. Soit $I_1, I_2, \ldots$ cette suite de cortège d'indices.

Je suppose que t, compris entre o et 1, peut être écrit sous la forme

$$t = \frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{3^2} + \ldots + \frac{\theta_n}{3^n} + \ldots,$$

tous les θ étant égaux à o ou 2. Alors t fait partie d'un certain ensemble parfait Z. Je prends

$$2a_{I_1} = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_3}{2^2} + \ldots + \frac{\theta_{2n+1}}{2^n} + \ldots,$$

$$2a_{I_2} = \frac{\theta_{2.1}}{2} + \frac{\theta_{2.3}}{2^2} + \ldots + \frac{\theta_{2(2n+1)}}{2^n} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2a_{I_p} = \frac{\theta_{2^{p-1}.1}}{2} + \frac{\theta_{2^{p-1}.3}}{2^2} + \ldots + \frac{\theta_{2^{p-1}(2n+1)}}{2^n} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Soit t une valeur ne faisant pas partie de Z. Puisque Z est parfait,

---

[1] Pour faire cette comparaison on ajoutera, si cela est nécessaire, un certain nombre de zéros à la suite des indices de I ou de I_1.

t fait partie d'un intervalle (t_0, t_1) dont les extrémités appartiennent à Z et dont aucun autre point ne fait partie de Z. Soient $a_{1_p}^0$, $a_{1_p}^1$ les valeurs de a_{1_p} correspondant à t_0 et t_1; dans (t_0, t_1) je prends

$$a_{1_p} = a_{1_p}^0 + \frac{a_{1_p}^1 - a_{1_p}^0}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

On verra facilement que les a_{1_p} ainsi définies sont des fonctions continues de t [1].

A partir de ces a_{1_p} comme coefficients, on peut former par les égalités telles que (1) des polynomes en x, je continuerai à les désigner par les mêmes symboles f que précédemment, mais j'indiquerai qu'il s'agit maintenant de fonctions de deux variables t, x. Ainsi, si f_1 désignait un polynome en x, $f_1(t, x)$ désignera une fonction continue en (t, x). A partir de ces fonctions continues $f_1(t, x)$, comme auparavant à partir des fonctions continues f_1, par des passages à la limite nous formerons des expressions $f_J(t, x)$ ayant de moins en moins d'indices et correspondant aux fonctions f_J. Nous arriverons ainsi en particulier à une expression $f(t, x)$ correspondant à f. Les expressions $f_J(t, x)$, $f(t, x)$ n'auront, en général, aucun sens, car les passages à la limite qu'indiquent ces expressions ne s'appliquent plus nécessairement à des suites convergentes; mais, quelle que soit la fonction f de classe α, ou même de classe inférieure à α, il existe une infinité de valeurs de t, et même une infinité de valeurs de t faisant partie de Z, telles que $f(t, x)$ soit identique, quel que soit x, à f.

Nous pouvons donc appliquer le procédé de M. Cantor aux fonctions $f(t, x)$; posons $\varphi(x) = 0$, sauf quand $f(x, x)$ a un sens et est égal à 0, auquel cas nous prendrons $\varphi(x) = 1$. Il est évident que $\varphi(x)$ est représentable analytiquement et n'est pas de classe égale ou inférieure à α. *Donc il existe des fonctions de toute classe;* c'est-à-dire qu'il y a contradiction à admettre à la fois les axiomes ordinaires de l'analyse plus cette propriété : toute suite convergente de fonctions des classes égales ou inférieures à α a pour limite une fonction de classe égale ou inférieure à α, puisque alors $\varphi(x)$ serait certainement

[1] On pourra consulter sur ce point la page 44 de mes *Leçons sur l'intégration*. Les considérations du texte définissent en somme une courbe remplissant tout un domaine de l'espace à une infinité dénombrable de dimensions.

de classe égale ou inférieure à α. Mais on peut aller plus loin. Cherchons la classe de $\varphi(x)$.

Cette classe est supérieure à α. D'autre part, si f_1 est de classe o, $f_1(t, x)$ est de classe o; de là on déduit que, si f_1 est de classe β, $f_1(t, x)$ est au plus de classe β; donc $f(t, x)$ est au plus de classe α, donc $f(x, x)$ est au plus de classe α [1]. Les deux ensembles

$$E[f(x, x) \neq 0] = E[\varphi(x) = 0], \quad E[f(x, x) = 0] = E[\varphi(x) = 1],$$

étant respectivement O et F de classe α au plus, sont F de classe $\alpha + 1$ au plus; $\varphi(x)$ est au plus de classe $\alpha + 1$. *Donc* $\varphi(x)$ *est de classe* $\alpha + 1$.

Soient β un symbole de classe quelconque et β_1, β_2, ... les symboles inférieurs rangés en suite simplement infinie. Si β est de première espèce, barrons dans la suite le symbole $\beta - 1$ et opérons sur la suite restante comme sur la suite α_1, α_2, ..., cela nous donnera une fonction $\varphi(x)$ de classe β. Si β est de seconde espèce, barrons dans la suite des β_i tous ceux qui sont de seconde espèce, et soit γ_1, γ_2, ... la nouvelle suite. Soit γ_i un symbole quelconque de cette suite, barrons tous ceux des γ_j qui sont égaux ou supérieurs à γ_i; cela donne une suite δ_1, δ_2, ... [2] à partir de laquelle, opérant comme sur α_1, α_2, ..., nous obtiendrons une fonction $\varphi(x)$ de classe γ_i; je représente cette fonction par $\varphi_i(x)$. Je pose alors $\varphi(x) = 0$ si $x = \frac{1}{2^i}$ quel que soit l'entier i et, pour $\frac{1}{2^{i+1}} < x < \frac{1}{2^i}$, $\varphi(x) = \varphi_i(2^i x - 1)$. Il est alors évident que $\varphi(x)$ est de classe β. *Nous avons donc nommé une fonction de classe donnée* β, je l'appelle $\varphi_\beta(x)$ [3].

Pour nommer maintenant une fonction échappant à tout mode de représentation analytique il nous suffira d'établir une certaine correspondance entre les symboles de classe et les points d'un segment. J'indique d'abord un raisonnement vague d'où l'on est peut-être en droit de conclure qu'il existe des fonctions non représentables analytique-

(1) Ici il est fait usage de la classification des fonctions non partout définies, mais cela n'entraîne aucune difficulté (*voir* p. 164).

(2) Si cette suite était finie et s'écrivait δ_1, δ_2, ..., δ_q, on la remplacerait par la suite infinie δ_1, δ_2, ... δ_q, δ_1, δ_2, ..., δ_q, δ_1, δ_2, ...

(3) Cette fonction n'est déterminée que lorsqu'on connaît la suite β_1, β_2, ...

ment. Le raisonnement de M. Cantor montre que l'ensemble des fonctions a une puissance supérieure à celle du continu, montrons donc que l'ensemble E des fonctions représentables analytiquement n'a pas une puissance supérieure au continu. Cela est vrai de l'ensemble E_α des fonctions de classe α au plus, puisque celles-ci dépendent de l'infinité dénombrable des constantes a_{1_p}. L'ensemble E est la somme des E_α ; d'un théorème de M. Cantor [1] il résulte que, si l'ensemble des α n'a pas une puissance supérieure au continu, E n'a pas une puissance supérieure au continu. Raisonnons ainsi : au symbole 1 faisons correspondre un point t_1 ; au symbole 2, un point t_2 ; ...; au symbole ω, un point t_ω ; . . . ; au symbole α, un point t_α, et ainsi de suite. Nous ne serons jamais arrêté, car, jusqu'à α, nous n'avons employé qu'une infinité dénombrable de points t_α, donc il reste des points et nous pourrons isoler l'un d'eux $t_{\alpha+1}$. De là nous concluons que l'ensemble des symboles a une puissance au plus égale à celle du continu ; il existe des fonctions non représentables analytiquement.

Mais, si l'on se reporte à ce que j'ai dit sur le théorème de Cantor, et si l'on remarque que nous avons prétendu démontrer l'existence d'une application de l'ensemble des symboles sur le continu, sans en nommer aucune, on aura peut-être quelque doute sur la valeur du raisonnement précédent. On doit même se demander, à mon avis, s'il a un sens quelconque et s'il est légitime de parler d'un nombre infini d'opérations ou de choix sans les déterminer en donnant la loi suivant laquelle ils sont faits. Je reprends donc la question.

Je suppose les nombres rationnels compris entre 0 et 1 rangés dans un certain ordre que je ne précise pas, mais que je suppose précisé ; soit z_1, z_2, . . . la suite considérée. Je prends une valeur de t comprise entre 0 et 1 et je l'écris dans le système de numération de base 2, en employant seulement, lorsque cela est possible, un nombre fini de fois le chiffre 1 ; l'expression de t est bien déterminée dès que t est donnée

$$t = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \dots .$$

Barrons dans la suite z_1, z_2, . . . tous les z_i qui correspondent aux

---

(1) *Acta mathematica*, t. II. — Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 16 et 17.

indices i des chiffres θ_i qui sont nuls; soient $z'_1, z'_2, \ldots$ les z conservés. Il se peut, et il en sera toujours ainsi si les z' sont en nombre fini, qu'on puisse trouver un symbole de classe α jouissant de la propriété suivante : on peut établir une correspondance entre les z' et tous les symboles β inférieurs à α de manière qu'à un z' corresponde un seul β, et inversement, et que, si à β et β_1 correspondent $z'(\beta)$ et $z'(\beta_1)$, on ait $z'(\beta) < z'(\beta_1)$ si β est plus petit que β_1. Alors α sera dit le symbole correspondant à t. De plus, à tout symbole $\beta\,(\beta < \alpha)$ correspond un entier i bien déterminé, l'indice du z' correspondant; si donc on range les β en leur donnant comme rang ces entiers i on aura une suite α_1, $\alpha_2, \ldots$ formée des symboles inférieurs à α [1]. A la valeur de t considéré nous pouvons, par suite, faire correspondre une fonction $\varphi_\alpha(x)$ de classe α; il suffit d'employer le procédé précédemment indiqué; cette fonction $\varphi_\alpha(x)$, qui n'est pas déterminée dès que α est donné, mais qui l'est dès que t est donné, si à t correspond un symbole α, je l'appellerai $\varphi(t, x)$. Si à t ne correspond pas de symbole α, je poserai $\varphi(t, x) = 0$.

Je dis que *la fonction $\varphi(t, x)$ échappe à toute représentation analytique;* cela sera évidemment démontré quand il sera prouvé que tout symbole α correspond à une valeur t, de sorte que, quel que soit α, il existe une valeur de t telle que $\varphi(t, x)$, en tant que fonction de x, est de classe α. Je vais examiner seulement le cas le plus difficile $\alpha \geq \omega$, dans lequel chaque α correspond à une infinité non dénombrable de valeurs de t.

Soient α un symbole et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les symboles inférieurs à α, pris chacun une seule fois, et rangés en suite simplement infinie. Je prends arbitrairement une série convergente de somme inférieure à $0,5$ et dont les termes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sont positifs. Soit β un symbole inférieur à α, il a un certain rang i dans la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; à β je fais correspondre ε_i. Soit S_β la somme, inférieure à $0,5 - \varepsilon_i$, de tous les ε qui correspondent

---

[1] J'admets dans tout ceci que, t étant donné, α, s'il existe, est déterminé et que la correspondance entre les β et les z' ne peut être établie que d'une façon. La démonstration de ces faits est immédiate, je ne la donne pas pour abréger. On pourra consulter sur ce point le Mémoire de M. Cantor *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* (traduction de F. Marotte, Paris, Hermann, 1899) ou la Note qui termine mes *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.*

à des symboles inférieurs à β, posons $l_\beta = 2S_\beta + \varepsilon_i$, $l'_\beta = 2S_\beta + 2\varepsilon_i$; soit enfin y_β celui des nombres rationnels compris entre l_β et l'_β qui, écrit sous forme irréductible, fournit pour la somme de ses deux termes le résultat le plus petit possible. La suite des y_β forme une suite telle que $z'_1, z'_2, \ldots$. Dans la suite des z', y_β occupe le $i^{\text{ième}}$ rang, dans la suite des z il occupe le rang I $(I \geq i)$. Je pose

$$t = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \ldots + \frac{\theta_n}{2^n} + \ldots,$$

en convenant de prendre $\theta_k = 1$ si K est l'un des rangs I correspondant aux $\beta < \alpha$ et $\theta_k = 0$ dans le cas contraire. Il est évident alors qu'à cette valeur de t correspond α; il reste cependant à démontrer que l'expression choisie pour t n'est pas l'une de celles exclues; c'est-à-dire que tous les θ d'indice assez grand ne sont pas égaux à 1. S'il en était ainsi l'ensemble des y_β ne différerait de celui des z_p que par la suppression d'un nombre fini de termes, or cela est impossible puisque tous les nombres rationnels compris entre y_1 et y_2 ne font pas partie des y_β.

La fonction $\varphi(t, x)$ non représentable analytiquement nous fournira autant de *fonctions d'une variable non représentables analytiquement* que nous le voudrons; il suffira, d'après le théorème XIX, de considérer la fonction d'une variable définie par $\varphi(t, x)$ sur une courbe remplissant le domaine $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$.

Ainsi on peut nommer des fonctions non représentables analytiquement, aussi ne faudrait-il pas confondre l'étude qui vient d'être entreprise avec celle des *fonctions qu'on peut nommer*, étude qu'il serait intéressant d'aborder.

J'ajoute quelques remarques qui se déduisent immédiatement des considérations précédentes.

On a vu qu'à tout symbole α on pouvait faire correspondre une infinité de valeurs $t\,(0 < t < 1)$ et qu'une valeur t correspondait à un symbole au plus; on peut traduire cela en disant que l'*ensemble des symboles (ou des nombres transfinis) a au plus la puissance du continu*, propriété qui, comme je l'ai dit, ne me paraît pas rigoureusement démontrée par les raisonnements que j'ai rappelés.

Soit $\psi(t)$ l'une des fonctions non représentables analytiquement que nous avons appris à former; elle ne prend que les valeurs 0 ou 1, donc

les deux ensembles $E[\psi(t)=0]$, $E[\psi(t)=1]$ sont tous deux non mesurables B. Ainsi, *nous savons nommer des ensembles non mesurables* B.

Soit E un ensemble non mesurable B formé de valeurs de x comprises entre o et 1. Je puis toujours écrire

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \ldots + \frac{\theta_n}{2^n} + \ldots,$$

où les θ sont égaux à o ou 1; lorsque cela sera possible de deux manières, je prendrai celle qui n'emploie qu'un nombre fini de fois le chiffre 1. Je pose

$$t = \frac{2\theta_1}{3} + \frac{2\theta_2}{3^2} + \ldots + \frac{2\theta_n}{3^n} + \ldots.$$

La correspondance entre x et t est exprimable analytiquement, donc, à tout ensemble de valeurs de x (ou de t) mesurable B, elle fait correspondre un ensemble en t (ou x) mesurable B; par suite à E correspond un ensemble E_1 non mesurable B. Or, cet ensemble étant formé de points de l'ensemble Z de la page 210, lequel est mesurable B et de mesure nulle, E_1 est mesurable et de mesure nulle ([1]). Donc, *nous savons nommer un ensemble mesurable qui n'est pas mesurable* B.

Mais la question beaucoup plus intéressante : peut-on nommer un ensemble non mesurable? reste entière ([2]).

([1]) Une fonction bornée nulle partout, sauf aux points de E_1, est intégrable au sens de Riemann et cependant échappe à tout mode de représentation analytique.

([2]) En corrigeant les épreuves, je signale deux Ouvrages relatifs aux questions traitées ici et qui sont parus depuis l'époque où je rédigeais ce Mémoire (mai 1904). Ce sont les *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. René Baire, et les *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* de M. Émile Borel (tous deux chez Gauthier-Villars, Paris, 1905).

Dans la note III de ce dernier Ouvrage se trouve le raisonnement dont je parlais dans la note 1 de la page 208. Dans la note II du même Ouvrage j'ai démontré le théorème XV par les méthodes du texte; dans quelques pages publiées dans le *Bulletin de la Société mathématique de* 1904 j'ai repris cette démonstration sous une autre forme.

Mémoire sur les formes quadratiques, suivant un module premier p, invariantes par une substitution linéaire donnée;

Par M. Camille JORDAN.

Introduction.

1. Dans un précédent Mémoire (*Journal de Liouville*, 1888) nous avons indiqué les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution linéaire S étant donnée, il existe des formes quadratiques (de discriminant non nul) que S n'altère pas.

Nous avons en outre montré que ces formes invariantes Φ appartiennent à un type unique, car on peut les transformer les unes dans les autres par des substitutions linéaires qui n'altèrent pas l'expression de S.

Si les coefficients de la substitution et de la forme, au lieu d'être des quantités quelconques, sont des entiers réduits à leur reste suivant un module premier p, on pourra se poser un problème analogue au précédent, mais de nature arithmétique. Il se résout à l'aide des mêmes principes; il est toutefois plus compliqué et les résultats sont sensiblement différents.

Avant de l'aborder, il conviendra de rappeler brièvement quelques résultats connus dont nous aurons à faire usage. Nous les empruntons en partie à notre *Traité des Substitutions*, en partie au bel Ouvrage

dans lequel M. Dickson a récemment élargi et complété, sur plusieurs points essentiels, l'étude des groupes linéaires ([1]).

2. Deux entiers congrus suivant le module p seront considérés comme égaux pour abréger le langage. Deux substitutions linéaires (ou deux formes) seront regardées comme identiques si tous leurs coefficients sont égaux.

Elles seront dites *équivalentes* (ou du même type), si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation linéaire opérée sur les variables. Si la substitution transformante appartient à un sous-groupe Γ du groupe linéaire, elles seront dites *équivalentes dans ce sous-groupe*.

3. Les substitutions linéaires de déterminant $\gtrless 0 \bmod p$ entre n variables $x_1, \ldots, x_n$ dérivent toutes de la combinaison des substitutions fondamentales suivantes, qui n'altèrent chacune qu'une variable

$$|x_i \quad \lambda x_i|,$$

$$|x_i \quad x_i + x_k|.$$

Leur nombre Ω_n^p est donné par la formule

$$\Omega_n^p = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_1^n (p^k - 1).$$

Si les coefficients, au lieu d'être réels, sont des entiers complexes formés avec une racine d'une congruence irréductible de degré ν, on devra, dans la formule précédente, changer p en p^ν; on aura ainsi

$$\Omega_{n,\nu}^p = p^{\nu\frac{n(n-1)}{2}} \prod_1^n (p^{\nu k} - 1).$$

([1]) DICKSON, *Linear Groups*. Teubner, Leipzig, 1901.

4. Une substitution linéaire

$$S = | x_i \quad \Sigma a_{ik} x_k | \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

peut être ramenée par un changement de variables à une expression canonique que nous allons indiquer.

Formons la congruence caractéristique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad (\bmod p),$$

et décomposons Δ en facteurs irréductibles suivant le module p. Soient P l'un de ces facteurs, ν son degré, μ son ordre de multiplicité. La congruence $P \equiv 0 \bmod p$ admettra ν racines conjuguées,

$$\rho, \quad \rho^p, \quad \ldots, \quad \rho^{p^{\nu-1}}.$$

Parmi les nouvelles variables qui donnent à S sa forme canonique, il y en aura précisément $\mu\nu$ correspondant au facteur P.

Ce système de $\mu\nu$ variables se partage en ν classes correspondant aux diverses racines conjuguées. Les μ variables x', x'', ... de la première classe C_0 (correspondant à la racine ρ) seront de la forme

$$x^i = X_0^i + \rho X_1^i + \ldots + \rho^{\nu-1} X_{\nu-1}^i \qquad (i = 1, \ldots, \mu),$$

les X étant des fonctions linéaires réelles des variables primitives. Elles forment une ou plusieurs séries s_1, s_2, ... La substitution S remplace les variables x_0, x_1, ..., x_m de l'une de ces séries respectivement par

$$\rho x_0, \quad \rho(x_1 + x_0), \quad \ldots, \quad \rho(x_m + x_{m-1}).$$

Les μ variables de la classe C_0 peuvent donc être représentées par le symbole x_i^α, l'indice supérieur α variant d'une série à l'autre, et l'in-

dice i représentant le *rang* qu'occupe la variable considérée dans la série s_α.

Les variables de la classe C_k qui correspond à la racine ρ^{p^k} ont des expressions qui se déduisent des précédentes en y remplaçant ρ par sa conjuguée ρ^{p^k}. Les altérations que S leur fait subir sont de même conjuguées des altérations qu'elle fait éprouver aux variables correspondantes de la classe C_0. Elles se partagent donc en séries, $s_1^k, s_2^k, \ldots$ respectivement conjuguées des séries $s_1, s_2, \ldots$.

5. Si l'on exécute sur les variables de la classe C_0 une substitution linéaire quelconque T_0 dont les coefficients soient des entiers complexes formés avec ρ et si l'on effectue en même temps sur chacune des séries conjuguées la substitution conjuguée T_k, l'opération résultante

$$T = T_0 \ldots T_k \ldots$$

sera une substitution réelle.

Celles de ces substitutions qui transforment S en elle-même forment un groupe Γ qui peut être construit comme il suit :

1° Groupons les séries $s_1, s_2, \ldots$ de la classe C_0 en sous-classes, en réunissant celles qui contiennent le même nombre $m+1$ de variables; soit

$$(x'_0, \ldots, x'_m), \quad (x''_0, \ldots, x''_m), \quad \ldots, \quad (x^l_0, \ldots, x^l_m)$$

une de ces sous-classes contenant l séries.

Opérons simultanément sur les $m+1$ systèmes de variables cogrédientes

$$(x'_0, x''_0, \ldots, x^l_0), \quad \ldots, \quad (x^l_m, \ldots, x^l_m).$$

une même substitution linéaire quelconque

$$|x', x'', \ldots, x^l \quad a_1 x' + b_1 x'' + \ldots + a_2 x' + b_2 x'' + \ldots + a_l x' + b_l x'' + \ldots|$$

En prenant pour T_0 cette opération, T sera l'une des substitutions du groupe Γ.

2° On en obtiendra une autre en prenant pour T_0 la substitution

$$|x^\alpha_m, x^\alpha_{m-1}, \ldots, x^\alpha_{m-r}, \ldots, x^\alpha_0 \quad x^\alpha_m + \lambda x^\beta_r, x^\alpha_{m-1} + \lambda x^\beta_{r-1}, \ldots, x^\alpha_{m-r} + \lambda x^\beta_0, \ldots, x^\alpha_0|,$$

où λ est une indéterminée et x_r^β l'une quelconque des variables de C_0 dont le rang r est $< m$.

Réciproquement toutes les substitutions de Γ résulteront de la combinaison des deux sortes de substitutions ci-dessus.

6. Les formes quadratiques Φ à n variables dont le discriminant D n'est pas congru à o mod p appartiennent, si p est impair, à deux types différents, correspondant aux deux valeurs ± 1 du caractère quadratique $\left(\frac{D}{p}\right)$.

La forme Φ peut en effet se réduire à la suivante :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + a x_n^2,$$

où le nombre a est arbitrairement choisi parmi ceux qui satisfont à la relation

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^n \left(\frac{D}{p}\right).$$

Il est d'ailleurs évident que le caractère $\left(\frac{D}{p}\right)$ est un invariant, qu'aucun changement de variables ne peut altérer.

Le nombre $\Omega_n^p(D, c)$ des solutions de la congruence

$$\Phi \equiv c \pmod{p}$$

est égal, si $n = 2m + 1$, à

$$p^m \left[p^m + \left(\frac{-1}{p}\right)^m \left(\frac{2c}{p}\right) \left(\frac{D}{p}\right) \right],$$

et si $n = 2m$, à

$$p^{m-1} \left[p^m - \left(\frac{-1}{p}\right)^m \left(\frac{D}{p}\right) \right] \qquad \text{si} \qquad c \gtrless 0,$$

$$p^{m-1} \left[p^m + (p-1) \left(\frac{-1}{p}\right)^m \left(\frac{D}{p}\right) \right] \qquad \text{si} \qquad c \equiv 0.$$

Ces formules nous serviront à déterminer le signe du caractère $\left(\frac{D}{p}\right)$

lorsque Φ est exprimée de telle sorte que le calcul de son discriminant offre quelque difficulté.

Si $p=2$, il n'existera de forme quadratique de discriminant impair que si n est un nombre pair $2m$. On aura dans ce dernier cas deux types de formes, correspondant aux deux valeurs du caractère invariant $\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right)$.

Si $\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right)=+1$, Φ sera réductible à une somme de rectangles

$$\sum_1^m x_k y_k.$$

Si $\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right)=-1$, elle sera réductible à la forme

$$x_1^2+y_1^2+\sum_1^m x_k y_k.$$

Le nombre $\Omega_{2m}^2(\mathrm{D}, c)$ des solutions de la congruence $\Phi\equiv c$ sera donné par les formules

$$\begin{aligned}\Omega_{2m}^2(\mathrm{D}, c) &= 2^{2m-1}+2^{m-1}(-1)^m\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right) \qquad \text{si} \qquad c=0,\\ &= 2^{2m-1}-2^{m-1}(-1)^m\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right) \qquad \text{si} \qquad c=1.\end{aligned}$$

7. Les substitutions linéaires qui laissent invariable une forme quadratique donnée Φ (de discriminant $\gtrless 0 \bmod p$) forment un groupe G, dit *groupe de la forme* Φ.

A deux formes équivalentes Φ, Φ' correspondent deux groupes G, G' transformables l'un dans l'autre par une substitution linéaire et appartenant par suite au même type.

Si le nombre n des variables est pair, on aura ainsi deux types de groupes répondant aux deux types de formes Φ.

Si n est impair (d'où p impair), ces deux types se confondent en un

seul, car toute substitution qui laisse invariante une forme Φ de discriminant D laissera aussi invariante la forme $a\Phi$ de discriminant a^nD, laquelle est d'un autre type que Φ, si a est un non résidu de p.

L'ordre $O_n^p(D)$ du groupe G qui laisse invariante une forme Φ de discriminant D s'obtient aisément, si p est impair, par la formule récurrente

$$O_n^p(D) = \Omega_n^p(D, c)\, O_{n-1}^p(2cD),$$

où c est un entier quelconque $\not\equiv 0 \bmod p$.

On trouve ainsi, si n est impair $= 2m+1$,

$$O_{2m+1}^p(D) = 2p^{m^2}\prod_1^m (p^{2k}-1)$$

et, si $n = 2m$,

$$O_{2m}^p(D) = 2p^{m(m-1)}\left[p^m - \left(\frac{-1}{p}\right)^m\left(\frac{D}{p}\right)\right]\prod_1^{m-1}(p^{2k}-1).$$

Si $p = 2$, auquel cas n est toujours pair $= 2m$, on aura

$$O_{2m}^2(D) = 2^{m(m-1)+1}\left[2^m - (-1)^m\left(\frac{2}{D}\right)\right]\prod_1^{m-1}(2^{2k}-1).$$

Le nombre $\mathfrak{N}_n^p(D)$ des formes distinctes équivalentes à Φ s'obtient évidemment en divisant le nombre total $\mathcal{A}_n^p$ des substitutions linéaires par le nombre $O_n^p(D)$ de celles qui laissent Φ invariante. On aura par suite, si p est impair,

$$\mathfrak{N}_{2m+1}^p(D) = \frac{1}{2}p^{m(m+1)}\prod_1^m (p^{2k-1}-1)$$

$$\mathfrak{N}_{2m}^p(D) = \frac{1}{2}p^{m^2}\left[p^m + \left(\frac{-1}{p}\right)^m\left(\frac{D}{p}\right)\right]\prod_1^m (p^{2k-1}-1)$$

et, si $p = 2$,

$$\mathfrak{N}_{2m}^2(D) = 2^{m^2-1}\left[2^m + (-1)^m\left(\frac{2}{D}\right)\right]\prod_1^m (2^{2k-1}-1).$$

8. Les formes bilinéaires gauches

$$\sum c_{ik} x_i X_k \qquad (c_{ik} = -c_{ki})$$

à deux séries de variables cogrédientes

$$x_1, \quad \dots, \quad x_n; \qquad X_1, \quad \dots, \quad X_n$$

n'ont leur déterminant différent de zéro que si n est un nombre pair $2m$. Elles sont toutes équivalentes à une même forme type

$$\sum_1^m (x_{2k-1} X_{2k} - x_{2k} X_{2k-1}).$$

L'ordre ω_{2m}^p du groupe formé par les substitutions qui laissent invariante l'une d'elles est donné par la formule

$$\omega_{2m}^p = p^{m^2} \prod_1^m (p^{2k} - 1)$$

et le nombre ϖ_{2m}^p des formes distinctes du système sera

$$\varpi_{2m}^p = \frac{\mathcal{A}_{2m}^p}{\omega_{2m}^p} = p^{m(m-1)} \prod_1^m (p^{2k-1} - 1).$$

9. Ces préliminaires posés, nous donnerons, dans les trois premières Sections de ce Mémoire, la solution des questions suivantes :

1° Une substitution $S \pmod p$ étant donnée, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des formes quadratiques $\Phi \pmod p$, de discriminant $\gtrless 0 \pmod p$, que S laisse invariantes ?

2° Quelle est l'expression générale de ces formes invariantes ?

3° A quels types simples peut-on les réduire par les changements de variables qui n'altèrent pas l'expression de S ?

4° Quel est le nombre de ces types ?

5° Quel est le nombre des formes invariantes distinctes réductibles à chacun d'eux ?

6° Quel est pour chacun d'eux le signe du caractère quadratique $\left(\frac{D}{p}\right)$ ou $\left(\frac{2}{D}\right)$?

Nous établissons en particulier les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de formes invariantes* Φ *sont les suivantes* :

1° *A chaque racine* ρ *de la congruence caractéristique de* S, *autre que* $\pm 1 \bmod p$, *est associée une racine* ρ^{-1} *de la même congruence, réciproque de* ρ;

2° *Les deux classes* C, C' *correspondant à ces deux racines contiennent le même nombre de variables, dont la répartition en séries est identique dans les deux classes;*

3° *Si la congruence caractéristique admet une racine égale à* $\pm 1 \bmod p$, *la classe correspondante* C *sera dite* singulière. *Groupons ses séries en sous-classes, en réunissant ensemble celles où le nombre des variables est le même.*

Si p *est impair, chaque sous-classe dont les séries contiennent un nombre pair de variables sera formée d'un nombre pair de séries.*

Si $p = 2$, *chaque sous-classe dont les séries contiennent un nombre impair de variables sera formée d'un nombre pair de séries.*

Théorème II. — *Les formes invariantes* Φ *appartiennent toutes au même type, si la congruence caractéristique de* S *n'a pas de racine égale à* $\pm 1 \bmod p$.

Si elle admet de semblables racines, p *étant impair, le nombre des types distincts sera* 2^k, k *désignant le nombre des sous-classes contenues dans les classes singulières et dont les séries sont formées d'un nombre impair de variables.*

Si, p *étant égal à* 2, *la congruence caractéristique admet la racine* 1, *soient, dans la classe singulière,* k *le nombre total des sous-classes,* k' *celui des sous-classes formées d'un nombre pair de séries, contenant chacune un nombre pair de variables : le nombre des types distincts sera* $2^{k-k'}3^{k'}$.

Pour la solution des autres questions posées ci-dessus, qu'il serait plus difficile de résumer, nous renverrons à la suite du Mémoire.

10. La quatrième Section a pour objet la question suivante :

Le groupe G des substitutions linéaires qui laissent invariante une forme quadratique à $2n$ variables réductible à une somme de rectangles

$$\Phi = \sum_1^n x_k y_k,$$

est dérivé, comme on sait, des substitutions fondamentales suivantes

$$\begin{aligned} L_i &= | x_i, y_i \quad y_i, x_i |, \\ M_{ik} &= | x_i, y_k \quad x_i + x_k, y_k + y_i |. \end{aligned}$$

Si la forme Φ est du second type

$$\Phi = x_1^2 + y_1^2 + \sum_1^n x_k y_k,$$

les substitutions fondamentales seront les suivantes

$$\begin{aligned} &L_i, \\ &M_{ik} \qquad (i > 1, k > 1), \\ N &= | x_1, y_1 \quad y_1, x_1 + y_1 |, \\ P &= | x_1, y_1, y_2 \quad x_1 + y_1 + x_2, x_1, x_1 + x_2 + y_2 |. \end{aligned}$$

Une substitution de G sera dite *paire* ou *impaire* suivant que, dans son expression en produit de substitutions fondamentales, le nombre des facteurs de l'espèce L est pair ou impair.

Nous avons établi autrefois par des considérations indirectes que les substitutions paires de G forment un sous-groupe invariant Γ d'ordre moitié moindre. Mais nous avions inutilement cherché à établir un caractère, plus simple que la définition précédente, et qui permette de discerner les substitutions paires. M. Dickson a réussi à combler cette lacune dans le bel Ouvrage auquel nous avons déjà renvoyé. Il y donne, au n° 205, l'expression d'un invariant dont la parité ou l'imparité sert à fixer le genre d'une substitution quelconque de G.

Ce critérium suppose, pour être appliqué, que la forme Φ a été

réduite préalablement à l'un des deux types normaux

$$\sum x_k y_k, \quad x_1^2 + y_1^2 + \sum x_k y_k.$$

Nous montrerons que l'on peut se dispenser de cette opération, en assignant un nouveau critérium très simple et complètement indépendant de la forme Φ que l'on considère. Il peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Soit* S *une substitution linéaire qui laisse invariante une forme quadratique* Φ mod 2. *Elle sera paire ou impaire, suivant que dans sa forme canonique le nombre des séries formées par les variables est pair ou impair.*

Analyse.

11. Supposons la substitution S ramenée à sa forme canonique

$$S = \left| \begin{array}{ll} x_0, \ \ldots, \ x_i, \ \ldots & \rho x_0, \ \ldots, \ \rho(x_i + x_{i-1}), \ \ldots \\ y_0, \ \ldots, \ y_k, \ \ldots & \rho_1 y_0, \ \ldots, \ \rho_1(y_k + y_{k-1}), \ \ldots \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots & \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \end{array} \right|.$$

Soient

$$s_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_m), \qquad s_1 = (y_0, y_1, \ldots, y_m), \quad \ldots \quad .$$

les diverses séries entre lesquelles se répartissent les variables; $\rho, \rho_1, \ldots$ les multiplicateurs correspondants.

Soit Φ une forme invariante : elle sera une somme de formes partielles, les unes $B_{\alpha\beta}$ bilinéaires par rapport à deux séries différentes s_α, s_β; les autres Q_α quadratiques par rapport aux variables d'une seule série s_α. Chacune de ces formes partielles devra être invariante séparément.

Soit d'ailleurs $a x_i y_k$ un terme quelconque de l'une de ces formes partielles, telle que B_{01}. Nous dirons que x_i, y_k sont des variables de rang i et k respectivement et que le terme $a x_i y_k$ est de rang $i+k$.

La substitution S le transforme en

$$\rho\rho_1 a(x_i + x_{i-1})(y_k + y_{k-1}),$$

somme de quatre termes dont le premier est $\rho\rho_1 a x_i y_k$; les deux suivants $\rho\rho_1 a x_{i-1} y_k$, $\rho\rho_1 a x_i y_{k-1}$ sont de rang $i+k-1$ et le dernier $\rho\rho_1 a x_{i-1} y_{k-1}$ de rang $i+k-2$. (Si i ou k était égal à zéro, ceux de ces termes où figureraient des variables à indice négatif sont à supprimer.)

Il résulte évidemment de là que, dans la transformée $B_{01} + \Delta B_{01}$ de B_{01} par S, l'ensemble des termes de rang maximum s'obtiendra en multipliant par $\rho\rho_1$ l'ensemble des termes de rang maximum dans B_{01}.

Pour que ces deux formes soient égales il est donc nécessaire, ou que B_{01} soit identiquement nul, ou qu'on ait $\rho\rho_1 = 1$.

Mais le discriminant de Φ serait nul si les variables d'une série, telle que s_0, disparaissaient de son expression. Il faut donc qu'il y ait au moins une série (différente ou non de s_0) dont le multiplicateur soit égal à ρ^{-1}.

Il peut y avoir plusieurs séries s_0, s_1, ... correspondant au même multiplicateur ρ; elles formeront une classe C; les séries au multiplicateur ρ^{-1} formeront une classe C' *associée* à la précédente; et Φ sera de la forme

$$\Phi = [CC'] + \Psi,$$

$[CC']$ désignant une forme bilinéaire par rapport aux variables de C et de C' et Ψ ne les contenant plus.

1° Si $\rho = \rho^{-1}$, d'où $\rho = \pm 1 \pmod{p}$ (ces deux hypothèses se confondent si $p = 2$), la classe C' se confond avec la classe C, et l'on aura

$$\Phi = [C] + \Psi,$$

$[C]$ étant quadratique par rapport aux variables de C, et Ψ ne les contenant plus;

2° Si ρ n'est pas égal à ρ^{-1}, les classes C et C' sont différentes et l'on aura

$$\Phi = [CC'] + \Phi',$$

$[CC']$ étant bilinéaire par rapport aux variables de C et de C' et Φ' ne les contenant plus.

Dans ce cas ρ pourra ne pas être réel, mais racine d'une congruence irréductible de degré > 1; C fera alors partie d'un système s de classes conjuguées

$$C, \quad C_1, \quad \ldots, \quad C_k, \quad \ldots$$

ayant pour multiplicateurs respectifs

$$\rho, \quad \rho^p, \quad \ldots, \quad \rho^{p^k}, \quad \ldots.$$

Si ρ^{-1} fait partie de cette suite, soit pour fixer les idées

$$\rho^{p^\nu} \equiv \rho^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho^{p^\nu+1} \equiv 1.$$

Les classes

$$C, \quad C_1, \quad \ldots, \quad C_k$$

auront respectivement pour associées les classes

$$C_\nu, \quad C_{\nu+1}, \quad \ldots, \quad C_{\nu+k}$$

et C_ν aura pour associée $C_{2\nu}$. Mais cette associée est C. Donc s contient 2ν classes distinctes, et l'on aura

$$\Phi = [CC_\nu] + [C_1C_{\nu+1}] + \ldots + [C_{\nu-1}C_{2\nu-1}] + \Psi = [s] + \Psi,$$

$[s]$ ne contenant que les variables du système s et Ψ les autres variables.

D'ailleurs la forme Φ étant réelle ne doit pas changer si l'on y remplace ρ par ρ^p. Donc Ψ a ses coefficients réels; d'autre part, par ce changement, les formes partielles $[CC_\nu]$, $[C_1C_{\nu+1}]$, ... devront se transformer chacune dans la suivante; elles sont donc conjuguées; enfin la dernière $[C_{\nu-1}C_{2\nu-1}]$ devra se changer dans la première; ce qui revient à dire que $[CC_\nu]$ ne doit pas être altérée par le changement de ρ en ρ^{p^ν}. Cette condition implique une certaine restriction pour les coefficients de cette forme bilinéaire. En outre leur déterminant ne doit pas être nul.

3° Supposons enfin que C' ne fasse pas partie de la suite des conjuguées de C. Soit ν le nombre de celles-ci. Elles auront respectivement

pour associées les conjuguées de C',

$$C', \quad C'_1, \quad \ldots, \quad C'_{\nu-1},$$

lesquelles formeront un système s' associé à s et Φ sera de la forme

$$\Phi = [CC'] + [C_1 C'_1] + \ldots + [C_\nu C'_\nu] + \Psi,$$

$[CC']$, $[C_1 C'_1]$, ... étant des fonctions bilinéaires conjuguées et Ψ ne contenant plus les variables de s ni de s'.

Les formes partielles $[CC'] + [C_1 C'_1] + \ldots + [C_\nu C'_\nu]$ constituent par leur réunion une forme réelle $[ss']$ bilinéaire par rapport aux variables des deux systèmes associés s et s'. Dans chacun de ces systèmes les variables complexes peuvent être remplacées par les variables réelles dont elles dépendent.

On remarquera que le déterminant de la forme bilinéaire $[CC']$, entrant en facteur dans le discriminant de Φ, ne doit pas être nul. Il faut pour cela que les classes associées C, C' contiennent le même nombre μ de variables. Il en était évidemment de même dans le cas précédent où l'on supposait ces deux classes conjuguées.

Nous pouvons donc énoncer une première condition nécessaire pour qu'il existe des formes Φ (de déterminant non nul) invariantes par la substitution S. C'est qu'à chaque racine ρ de sa congruence caractéristique, autre que ± 1, corresponde une racine associée ρ^{-1} du même ordre de multiplicité; autrement dit :

La congruence caractéristique de S doit être réciproque.

Il résulte d'ailleurs de l'analyse précédente que, si l'on joint à chaque classe ses conjuguées et leurs associées pour les réunir en une même famille, toute forme invariante Φ sera une somme de formes partielles Φ_1, Φ_2, ... contenant chacune les variables d'une seule famille. Chacune de ces formes partielles sera :

1° Ou une fonction bilinéaire

$$[ss'] = \sum_0^{\nu-1} [C_k C'_k]$$

par rapport aux variables de deux systèmes associés ;

2° Ou une fonction

$$[s] = [\mathrm{C}\mathrm{C}_\nu] + [\mathrm{C}_1 \mathrm{C}_{\nu+1}] + \ldots + [\mathrm{C}_{\nu-1} \mathrm{C}_{2\nu-1}]$$

des variables d'un seul système contenant un nombre pair 2ν de séries associées deux à deux;

3° Ou enfin une fonction $[\mathrm{C}]$ quadratique par rapport aux variables d'une série au multiplicateur ± 1, laquelle sera associée à elle-même.

La substitution S de son côté est le produit de substitutions partielles S_1, S_2, ... effectuées chacune sur les variables d'une seule famille. Il en est de même des substitutions qui la transforment en elle-même.

La détermination des formes Φ invariantes par la substitution S revient donc à celle des formes partielles Φ_1, Φ_2, ... respectivement invariantes par les substitutions partielles S_1, S_2, ...

Pour les réduire à des formes types, il faudra réduire séparément ces formes partielles.

Le nombre des formes distinctes réductibles à chaque type sera le produit des nombres de formes distinctes pour Φ_1, pour Φ_2, etc.

Enfin, le caractère quadratique du discriminant D de la forme Φ est le produit des caractères des discriminants des formes partielles Φ_1, Φ_2, ...

Les problèmes que nous nous sommes posés se trouvent ainsi réduits au cas où les variables ne forment qu'une seule famille.

Trois cas seront à considérer :

I.

12. Supposons d'abord qu'il existe deux systèmes associés mais différents s, s'.

La forme

$$\Phi_1 = [ss'] = \sum_0^{\nu-1} [\mathrm{C}_k \mathrm{C}'_k]$$

est une somme de ν formes bilinéaires complexes $[\mathrm{C}\mathrm{C}']$, $[\mathrm{C}_1 \mathrm{C}'_1]$, ..., conjuguées les unes des autres, et invariantes séparément. Il suffira de

déterminer l'expression de l'une d'elles $[CC']$. Celle de Φ_1 s'obtiendra en y ajoutant ses conjuguées.

Soient $s_1, s_2, \ldots$ les séries qui constituent la classe C; $s'_1, s'_2, \ldots$ celles qui constituent la classe C'; on aura évidemment

$$[CC'] = \sum_{\alpha,\beta} [\alpha\beta],$$

$[\alpha\beta]$ désignant l'ensemble des termes de $[CC']$ qui contiennent les produits des variables de s_α par celles de s_β. Chacune de ces formes partielles doit évidemment être invariante. Il suffira donc de construire l'une d'elles $[\alpha\beta]$.

Soient

$$x_0^\alpha, \quad x_1^\alpha, \quad \ldots, \quad x_{m_\alpha}^\alpha$$

les variables de la série s_α,

$$y_0^\beta, \quad y_1^\beta, \quad \ldots, \quad y_{m_\beta}^\beta$$

celles de la série s'_β.

Soit enfin

$$t = c_{ik} x_i^\alpha y_k^\beta$$

l'un quelconque des termes de la forme $[\alpha\beta]$; il aura pour rang $i+k$.

En lui appliquant la substitution S il sera changé en

$$c_{ik}(x_i^\alpha + x_{i-1}^\alpha)(y_k^\beta + y_{k-1}^\beta).$$

Son accroissement Δt se composera de trois termes, dont deux, $c_{ik} x_{i-1}^\alpha y_k^\beta$, $c_{ik} x_i^\alpha y_{k-1}^\beta$, sont de rang $i+k-1$ et le dernier, $c_{ik} x_{i-1}^\alpha y_{k-1}^\beta$, de rang $i+k-2$.

La forme $[\alpha\beta]$ étant invariante, son accroissement total $\Delta[\alpha\beta] = \Sigma \Delta t$ devra être identiquement nul.

Cela posé, considérons ceux des termes de $[\alpha\beta]$ dont le rang est le plus élevé; soit r ce maximum. L'ensemble de ces termes sera

$$c_{0r} x_0^\alpha y_r^\beta + c_{1,r-1} x_1^\alpha y_{r-1}^\beta + \ldots + c_{r0} x_r^\alpha y_0^\beta.$$

(On devra toutefois considérer *a priori* comme nuls tous ceux des coef-

ficients c qui multiplieraient soit des variables x d'indice $> m_\alpha$, soit des variables y d'indice $> m_\beta$, puisqu'il n'existe pas de semblables variables.)

Les termes de rang le plus élevé dans $\Delta[\alpha\beta]$ seront de rang $r - 1$ et exclusivement fournis par les termes de rang r écrits ci-dessus. Leur ensemble est le suivant :

$$(c_{0r} + c_{1,r-1}) x_0^\alpha y_{r-1}^\beta + (c_{1,r-1} + c_{2,r-2}) x_1^\alpha y_{r-2}^\beta + \ldots + (c_{r-1,1} + c_{r0}) x_{r-1}^\alpha y_0^\beta.$$

Il doit être identiquement nul; les coefficients c sont donc égaux et de signes alternatifs. Mais ils ne peuvent être tous nuls, puisqu'on admet l'existence dans $[\alpha\beta]$ de termes de rang r. Donc aucun d'eux ne le sera.

On en conclut que r ne peut surpasser le plus petit des deux nombres m_α, m_β; car s'il était $> m_\alpha$, par exemple, la variable x_r étant inexistante, c_{r0} serait nul.

L'ensemble des termes de rang maximum sera donc

$$a_r^{\alpha\beta} [x_0^\alpha y_r^\beta - x_1^\alpha y_{r-1}^\beta + \ldots + (-1)^r x_r^\alpha y_0^\beta],$$

$a_r^{\alpha\beta}$ étant un entier complexe constant.

On voit par là que la forme $[\alpha\beta]$, si elle n'est pas identiquement nulle, contient nécessairement les variables x_0^α, y_0^β au moins dans ses termes de rang maximum. Elle sera donc complètement déterminée par la connaissance de ceux de ses termes qui contiennent x_0^α en facteur. L'ensemble de ces termes sera de la forme

$$x_0^\alpha \sum_r a_r^{\alpha\beta} y_r^\beta,$$

r variant depuis o jusqu'au plus petit des deux nombres m_α, m_β.

Or on vérifie aisément que la forme

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta r} = x_0^\alpha y_r^\beta - x_1^\alpha y_{r-1}^\beta + (x_2^\alpha + x_1^\alpha) y_{r-2}^\beta + \ldots \\ + (-1)^k [x_k^\alpha + C_{k-1}^1 x_{k-1}^\alpha + C_{k-1}^2 x_{k-2}^\alpha + \ldots + x_1^\alpha] y_{r-k}^\beta + \ldots \\ + (-1)^r (x_r^\alpha + C_{r-1}^1 x_{r-1}^\alpha + \ldots + x_1^\alpha) y_0^\beta, \end{aligned}$$

où le multiplicateur de x_0^α se réduit à y_r^β, est invariante. En effet, par

la substitution S, le coefficient du terme en y^{β}_{r-k} se trouve accru de

$$\begin{aligned}&(-1)^{k}\ \ [x^{\alpha}_{k-1} + C^{1}_{k-1} x^{\alpha}_{k-2} + \ldots + x^{\alpha}_{0}]\\ &+(-1)^{k-1}[x^{\alpha}_{k-1} + C^{1}_{k-2} x^{\alpha}_{k-2} + \ldots + x^{\alpha}_{1}]\\ &+(-1)^{k-1}[x_{k-2} + C^{1}_{k-2} x_{k-3} + \ldots + x^{\alpha}_{0}],\end{aligned}$$

quantité identiquement nulle, car, en remplaçant les indices des x^{α} par des exposants, elle prend la forme symbolique

$$(-1)^{k}(1+x^{\alpha})^{k-1} + (-1)^{k-1} x^{\alpha}(1+x^{\alpha})^{k-2} + (-1)^{k-1}(1+x^{\alpha})^{k-2} = 0.$$

La forme la plus générale des fonctions $[\alpha\beta]$ invariantes sera donc

$$[\alpha\beta] = \sum_{r} a^{\alpha\beta}_{r} f_{\alpha\beta r}$$

et celle des fonctions $[CC']$ invariantes sera

$$\sum_{\alpha,\beta}\sum_{r} a^{\alpha\beta}_{r} f_{\alpha\beta r},$$

les a étant des entiers complexes arbitraires assujettis à la seule restriction que le déterminant de la forme bilinéaire $[CC']$ ne soit pas nul.

15. Nous allons montrer que toutes les formes invariantes ainsi obtenues peuvent être ramenées à un type unique par les substitutions du groupe Γ (formé des substitutions échangeables à S), et du même coup nous déterminerons leur nombre.

Continuons à désigner par $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha, \ldots$ les séries qui constituent la classe C; et soient

$$x^{\alpha}_{0}, \quad \ldots, \quad x^{\alpha}_{m_\alpha}$$

les variables en nombre $m_\alpha + 1$ de la série s_α.

Soient de même $s'_1, \ldots, s'_\beta, \ldots$ les séries de la classe C' et

$$y^{\beta}_{0}, \quad \ldots, \quad y^{\beta}_{m'_\beta}$$

les variables de la série s'_β.

On peut admettre que les séries aient été ordonnées de telle sorte qu'on ait

$$m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \ldots$$

et

$$m'_1 \geqq m'_2 \geqq m'_3 \ldots.$$

Admettons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_l = m, \qquad \text{mais} \qquad m_\alpha < m \quad \text{si} \quad \alpha > l,$$
$$m'_1 = m'_2 = \ldots = m'_{l'} = m', \qquad \text{mais} \qquad m'_\beta < m' \quad \text{si} \quad \beta > l'.$$

On aura nécessairement

$$m = m', \qquad l = l'.$$

Supposons en effet $m > m'$; $[CC']$ ne contenant aucun terme de rang $> m'$ ne pourrait contenir aucune des variables $x'_m, \ldots, x^l_m$ et son déterminant serait nul.

Si m était $< m'$, on n'aurait qu'à permuter les x et les y dans ce raisonnement.

Soit donc $m = m'$; $[CC']$ pourra contenir des termes de rang m, mais seulement dans celles des formes partielles $[\alpha\beta]$, où $\alpha \leqq l$, $\beta \leqq l'$; et dans celles-ci $x'_m, \ldots, x^l_m$ ne figurent que multipliées par les variables $y'_0, \ldots, y^{l'}_0$. Si donc l était $> l'$, les dérivées de $[CC']$ par rapport aux l variables $x'_m, \ldots, x^l_m$, ne dépendant que de l' variables ne seraient pas linéairement distinctes, et le déterminant serait encore nul. (De même si l était $< l'$, les dérivées par rapport aux l' variables $y'_m, \ldots, y^{l'}_m$ ne seraient pas distinctes.)

14. Cela posé, les termes de $[CC']$ qui contiennent les l variables y^β_m $(\beta = 1, \ldots, l)$ seront ceux de la forme binaire

$$\varphi = \sum a^{\alpha\beta}_m x^\alpha_0 y^\beta_m \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, l \\ \beta = 1, \ldots, l \end{pmatrix}.$$

Il faudra, pour que les dérivées par rapport à ces variables soient linéairement distinctes, que le déterminant de cette forme ne soit pas nul.

Il existe (nº 5) $\mathcal{A}^{p}_{l,\nu}$ systèmes de valeurs des entiers complexes $a_m^{\alpha\beta}$ qui satisfont à cette condition.

Nous allons vérifier que tous ces systèmes de valeurs sont également admissibles.

Le groupe Γ contient une substitution T qui remplace les variables $y'_m, \ldots, y^l_m$ respectivement par

$$\sum_\beta a_m^{1\beta} y_m^\beta, \quad \sum_\beta a^{2\beta} y_m^\beta, \quad \ldots$$

sans altérer les variables x (nº 5).

En transformant [CC′] par T^{-1}, on réduira φ à la forme plus simple

$$\varphi = \sum_\alpha x_0^\alpha y_m^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, l).$$

15. Après cette première opération, les termes en $x'_0, \ldots, x^l_0$ que contient [CC′] seront de la forme

$$x'_0[y'_m + \varphi_1] + \ldots + x^l_0[y^l_m + \varphi_l],$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ étant des fonctions linéaires de celles des variables y dont le rang est $< m$, lesquelles sont en nombre $\mu - l$ si μ est le nombre des variables de la classe C′. Leurs coefficients, au nombre de $l(\mu - l)$, pourront prendre chacun p^ν valeurs, soit en tout $p^{\nu l(\mu - l)}$ systèmes de valeurs également admissibles.

On pourra en effet, quels que soient ces coefficients, les faire disparaître successivement en commençant par ceux dont le rang est le plus élevé, en opérant sur [CC′] les substitutions de Γ.

Soit en effet cy_r^β un des termes de φ_1 dont le rang r soit maximum; il sera $< m$. Donc Γ contient une substitution T qui remplace y'_m, $y'_{m-1}, \ldots, y'_{m-r}$ par $y'_m - cy_r^\beta$, $y'_{m-1} - cy_{r-1}^\beta, \ldots, y'_{m-r} - cy_0^\beta$ sans altérer ni les autres variables y ni les variables x. Par cette substitution on fera disparaître de φ_1 le terme cy_r^β. On pourra, à la vérité, en introduire d'autres, tant dans φ_1 que dans $\varphi_2, \ldots, \varphi_l$, mais tous seront de rang moins élevé que celui qu'on a détruit.

En répétant cette réduction, on fera disparaître totalement les fonc-

tions φ, de manière à réduire ceux des termes de $[CC']$ qui contiennent $x'_0, \ldots, x^l_0$ en facteur à

$$x'_0 y'_m + \ldots + x^l_0 y^l_m.$$

On aura par suite, à ce moment de la réduction,

$$[CC'] = f_{11m} + f_{22m} + \ldots + f_{llm} + \Psi,$$

Ψ étant une forme invariante qui ne contient plus $x'_0, \ldots, x^l_0$, ni, par suite, aucune des variables des séries $s_1, \ldots, s_l$.

Les termes en $y'_0, \ldots, y^l_0$ dans

$$f_{11m} + \ldots + f_{llm}$$

sont

$$(-1)^m [x'_m y'_0 + x''_m y''_0 + \ldots + x^l_m y^l_0],$$

et dans Ψ ils seront de la forme

$$\varphi_1 y'_0 + \varphi_2 y''_0 + \ldots + \varphi_l y^l_0,$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ étant des fonctions linéaires des $\mu' = \mu - l(m+1)$ variables x qui appartiennent aux séries $s_{l+1}, \ldots$.

Leurs coefficients seront susceptibles de $p^{\nu l[\mu - l(m+1)]}$ systèmes de valeurs également admissibles. On pourra, en effet, quels que soient ces coefficients, les faire disparaître progressivement par le même procédé que tout à l'heure, en altérant les x de la même manière que nous l'avions fait pour les y.

16. Reste à réduire la fonction Ψ qui, à l'heure actuelle, ne contient plus ni les variables des séries $s_1, \ldots, s_l$, ni celles des séries $s'_1, \ldots, s'_l$. C'est un problème tout semblable à celui de la réduction de $[CC']$, mais le nombre des variables est diminué. Soient $s_{l+1}, \ldots, s_{l+l'}$ les séries les plus longues parmi celles qui restent dans la classe C; $m'+1$ le nombre des variables de chacune d'elles : on verra que C' doit contenir aussi l' séries $s'_{l+1}, \ldots, s'_{l+l'}$ de $m'+1$ variables, et

que Ψ' peut se réduire à la forme

$$\Psi' = f_{l+1,l+1,m'} + \ldots + f_{l+l',l+l',m'} + \Psi'',$$

Ψ'' ne contenant plus les variables des séries

$$s_{l+1}, \quad \ldots, \quad s_{l+l'}; \qquad s'_{l+1}, \quad \ldots, \quad s'_{l+l'}.$$

Poursuivant cette réduction on voit que [CC'] peut se réduire à la forme parfaitement définie

$$\sum_1^l f_{kkm} + \sum_l^{l+l'} f_{kkm'} + \ldots,$$

et nous trouvons cette nouvelle condition pour l'existence de formes invariantes par la substitution S.

Dans deux classes associées C, C' *les séries entre lesquelles se répartissent les variables doivent être en même nombre et de même longueur.*

Cette nouvelle condition, dont nous venons d'établir la nécessité en supposant que les deux classes associées C, C' appartiennent à des systèmes différents, est satisfaite d'elle-même dans les deux cas qui nous restent à examiner, à savoir ceux où les séries C, C' sont conjuguées ou coïncidentes.

17. Soient, d'ailleurs, $O(m, l; m', l'; \ldots)$ le nombre des formes invariantes [CC']; $O(m', l'; \ldots)$ celui des formes invariantes de l'espèce Ψ'; il résulte évidemment de notre analyse qu'on aura la formule récurrente

$$\begin{aligned} O(m, l; m', l'; \ldots) &= \mathcal{M}^{p}_{l,\nu} p^{\nu l(\mu-l)} p^{\nu l[\mu-l(m+1)]} O(m', l'; \ldots) \\ &= \mathcal{M}^{p}_{l,\nu} p^{\nu l[2\mu-l(m+2)]} O(m', l'; \ldots). \end{aligned}$$

18. Il reste enfin à déterminer le caractère des formes [SS'] que nous venons de construire et de réduire. La chose ne présente aucune difficulté; car [SS'] est bilinéaire par rapport aux variables x et à

leurs conjuguées en nombre $\mu\nu$ d'une part, aux variables y et à leurs conjuguées d'autre part. Elle restera bilinéaire si l'on remplace les deux systèmes de variables complexes par les variables réelles $X_1, \ldots, X_{\mu\nu}$; $Y_1, \ldots, Y_{\mu\nu}$ dont elles dépendent. Par un changement de variables qui n'altère pas son caractère on la ramènera à la forme

$$\sum_1^{\mu\nu} X_k Y_k,$$

dont le discriminant est $(-1)^{\mu\nu}$.

On aura donc, si p est impair,

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\mu\nu},$$

et, si $p = 2$,

$$\left(\frac{2}{D}\right) = (-1)^{\mu\nu}.$$

II.

19. Supposons maintenant qu'il existe un système S formé de 2ν classes, $C, C_1, \ldots, C_{2\nu-1}$ associées deux à deux. La forme correspondante $[S]$ sera encore ici la somme de ν formes partielles conjuguées

$$[CC_\nu] + [C_1 C_{\nu+1}] + \ldots + [C_{\nu-1} C_{2\nu-1}],$$

et il suffira de construire la première.

Soient $s_1, s_2, \ldots$ les séries qui constituent C; $s'_1, s'_2, \ldots$ les séries conjuguées contenues dans C_ν; et désignons par $x_0^\alpha, x_1^\alpha, \ldots, x_{m_\alpha}^\alpha$ les variables de s_α, par $y_0^\alpha, \ldots, y_{m_\alpha}^\alpha$ les variables correspondantes de s'_α.

On verra comme dans le cas discuté précédemment que $[CC_\nu]$ est une somme de formes partielles contenant respectivement les produits des variables d'une des séries de C, telle que s_α, par celle d'une des séries de C_ν, telle que s_β. Chacune de ces fonctions partielles $[\alpha\beta]$ sera séparément invariante.

La fonction $[\alpha\beta]$ ne peut contenir aucun terme de rang supérieur au plus petit des deux nombres m_α, m_β, et l'ensemble des termes de

rang r maximum sera ici encore de la forme

$$a_r^{\alpha\beta}[x_0^\alpha y_r^\beta - x_1^\alpha y_{r-1}^\beta + \ldots + (-1)^r x_r^\alpha y_0^\beta].$$

On pourrait en conclure que $[\alpha\beta]$ peut être mis sous la forme

$$\sum_r a_r^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta r}.$$

Mais les formes invariantes élémentaires $f_{\alpha\beta r}$ n'étant pas symétriques par rapport aux variables x, y, la condition que $[CC_\nu]$ ne soit pas altérée par le changement de ρ en ρ^{p^ν} s'exprimerait par des relations linéaires assez complexes entre les coefficients $a_r^{\alpha\beta}$. Il est donc préférable de substituer aux $f_{\alpha\beta r}$ de nouvelles fonctions élémentaires qui échappent à ce défaut.

20. Soit d'abord r pair $= 2n$. Considérons la fonction

$$F_{\alpha\beta,2n} = \left| \begin{array}{ll} & \left\{ \begin{array}{r} x_n^\alpha y_n^\beta - x_{n-1}^\alpha y_{n+1}^\beta + x_{n-2}^\alpha y_{n+2}^\beta - \ldots + (-1)^n x_0^\alpha y_{2n}^\beta \\ - y_{n-1}^\beta x_{n+1}^\alpha + y_{n-2}^\beta x_{n+2}^\beta - \ldots + (-1)^n y_0^\beta x_{2n}^\alpha \end{array} \right\} \\ - & \left\{ \begin{array}{r} b_0 x_{n-1}^\alpha y_n^\beta - b_1 x_{n-2}^\alpha y_{n+1}^\beta + b_2 x_{n-3}^\alpha y_{n+2}^\beta - \ldots \\ + b_0^{p^\nu} y_{n-1}^\beta x_n^\alpha - b_1^{p^\nu} y_{n-2}^\beta x_{n+1}^\alpha + b_2^{p^\nu} y_{n-3}^\beta x_{n+2}^\alpha - \ldots \end{array} \right\} \\ + & \left\{ \begin{array}{r} c_0 x_{n-2}^\alpha y_n^\beta - c_1 x_{n-3}^\alpha y_{n+1}^\beta + c_2 x_{n-4}^\alpha y_{n+2}^\beta - \ldots \\ + c_0^{p^\nu} y_{n-2}^\beta x_n^\alpha - c_1^{p^\nu} y_{n-3}^\beta x_{n+1}^\alpha + c_2^{p^\nu} y_{n-4}^\beta x_{n+2}^\alpha - \ldots \end{array} \right\} \\ - & \left\{ \begin{array}{l} d_0 x_{n-3}^\alpha y_n^\beta - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + d_0^{p^\nu} y_{n-3}^\beta x_n^\alpha - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Par le changement de ρ en ρ^{p^ν}, qui permute les x avec les y, elle se change en $F_{\beta\alpha,2n}$. Cherchons à déterminer les coefficients $b, c, \ldots$ de telle sorte qu'elle soit invariante par la substitution S.

Soit Δ l'accroissement qu'elle éprouve par cette substitution. Les termes de rang $2n-1$ s'y détruisent d'eux-mêmes. Pour annuler ceux de rang $2n-2$ on aura les équations de condition

$$1 - b_0 - b_0^{p^\nu} \equiv 0, \qquad -1 - b_0 + b_1 \equiv 0, \qquad 1 + b_1 - b_2 \equiv 0, \qquad \ldots,$$
$$-1 - b_0^{p^\nu} + b_1^{p^\nu} \equiv 0, \qquad 1 + b_1^{p^\nu} - b_2^{p^\nu} \equiv 0, \qquad \ldots.$$

La première de ces congruences admet p^ν racines qui sont des polynomes en ρ, car $b_0^{p^\nu} + b_0 - 1$ est un diviseur de $b_0^{p^{2\nu}} - b_0$. Prenons pour b_0 l'une d'elles choisie arbitrairement. Les autres relations de la première ligne donneront généralement

$$b_k \equiv b_{k-1} + 1 \equiv \ldots \equiv b_0 + k,$$

et celles de la seconde ligne, conjuguées des précédentes, seront satisfaites en même temps.

Pour annuler les termes de rang $2n-3$, on aura les relations

$$\begin{array}{llll} -b_0 + c_0 \equiv 0, & b_1 + c_0 - c_1 \equiv 0, & -b_2 - c_1 + c_2 \equiv 0, & \ldots, \\ & b_1^{p^\nu} + c_0^{p^\nu} - c_1^{p^\nu} \equiv 0, & -b_2^{p^\nu} - c_1^{p^\nu} + c_2^{p^\nu} \equiv 0, & \ldots, \end{array}$$

d'où

$$c_k \equiv c_{k-1} + b_k \equiv \ldots \equiv b_0 + b_1 + \ldots + b_k \equiv (k+1) b_0 + \frac{k(k+1)}{2}.$$

On trouvera de même

$$d_k \equiv c_0 + \ldots + c_k \equiv \frac{(k+1)(k+2)}{2} b_0 + \frac{k(k+1)(k+2)}{2.3},$$

etc.

21. Supposons maintenant $r = 2n-1$. La congruence $e^{p^\nu} + e \equiv 0$ admettra comme racines des polynomes en ρ, car son premier membre divise $e^{p^{2\nu}} - e$. Soit e l'une d'elles choisie à volonté et formons l'expression

$$F_{\alpha\beta,2n-1} = e \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x_{n-1}^\alpha y_n^\beta - x_{n-2}^\alpha y_{n+1}^\beta + \ldots + (-1)^{n-1} x_0^\alpha y_{2n-1}^\beta \\ - y_{n-1}^\beta x_n^\alpha + y_{n-2}^\beta x_{n+1}^\alpha - \ldots - (-1)^{n-1} y_0^\beta x_{2n-1}^\alpha \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{l} b_0 x_{n-2}^\alpha y_n^\beta - b_1 x_{n-3}^\alpha y_{n+1}^\beta + \ldots + (-1)^{n-2} b_{n-2} x_0^\alpha y_{2n-2}^\beta \\ - b_0^{p^\nu} y_{n-2}^\beta x_n^\alpha + b_1^{p^\nu} y_{n-3}^\beta x_{n+1}^\alpha - \ldots - (-1)^{n-2} b_{n-2}^{p^\nu} y_0^\beta x_{2n-2}^\alpha \end{array} \right| \\ + \left| \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right| \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Par le changement de ρ en ρ^{p^ν}, elle se transforme en $F_{\beta\alpha,2n-1}$. Elle sera d'ailleurs invariante par la substitution S si l'on y détermine les

coefficients b, c, ... par les relations

$$1 - b_0 = 0, \qquad -1 - b_0 + b_1 = 0, \qquad \ldots,$$
$$-b_0 + c_0 = 0, \qquad b_1 + c_0 - c_1 = 0, \qquad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots,$$

d'où l'on tire

$$b_k = k + 1,$$
$$c_k = b_0 + \ldots + b_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

22. L'expression la plus générale de la fonction invariante $[\alpha\beta]$ que nous cherchons sera évidemment

$$[\alpha\beta] = \sum_r a_r^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta r},$$

les a étant des entiers complexes constants; et celle de $[CC_\nu]$ sera, par suite,

$$[CC_\nu] = \sum_{\alpha,\beta} \sum_r a_r^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta r}.$$

D'ailleurs, le changement de ρ en ρ^{p^ν} dans cette expression la transforme en

$$\sum_{\alpha,\beta} \sum_r (a_r^{\alpha\beta})^{p^\nu} F_{\beta\alpha r} = \sum_{\alpha,\beta} \sum_r (a_r^{\beta\alpha})^{p^\nu} F_{\alpha\beta r}.$$

Comme elle doit rester invariable, on aura les relations de condition

(1) $$(a_r^{\beta\alpha})^{p^\nu} = a_r^{\alpha\beta}.$$

En particulier, si $\beta = \alpha$, on voit que les coefficients de la forme $[\alpha\alpha]$ sont assujettis à la relation

(2) $$(a_r^{\alpha\alpha})^{p^\nu} = a_r^{\alpha\alpha}.$$

Ceux des formes $[\alpha\beta]$ où $\beta < \alpha$ sont déterminés complètement par les relations précédentes en fonction de ceux des formes où $\beta > \alpha$; ces

derniers restent indéterminés, à la seule condition que le discriminant de $[CC_\nu]$ ne soit pas nul.

25. L'expression de $[CC_\nu]$ étant ainsi déterminée, proposons-nous de la réduire à une forme normale en la transformant par les substitutions de Γ, et de déterminer du même coup le nombre des formes distinctes de discriminant non nul, comprises sous cette expression générale.

Supposons, pour fixer les idées, que, parmi les séries $s_1, s_2, \ldots$, il y ait l, à savoir $s_1, \ldots, s_l$, qui contiennent $m+1$ variables, les autres séries $s_{l+1}, \ldots$ étant moins longues.

Les variables de rang maximum, $x'_m, \ldots, x^l_m$; $y'_m, \ldots, y^l_m$ ne figureront dans $[CC_\nu]$ que dans les termes de la forme bilinéaire

$$(3)\quad \varphi = A\sum_{\alpha,\beta} a_m^{\alpha\beta}[x_0^\alpha y_m^\beta + (-1)^m x_m^\alpha y_0^\beta] \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, l \\ \beta = 1, \ldots, l \end{pmatrix},$$

le coefficient A ayant une valeur constante, égale à $(-1)^n$ si $m = 2n$, et à $(-1)^{n-1}e$ si $m = 2n-1$.

D'ailleurs, les dérivées de $[CC_\nu]$ par rapport à $y'_m, \ldots, y^l_m$ devant être linéairement distinctes, le déterminant des coefficients $a_m^{\alpha\beta}$ ne sera pas nul. En particulier, les coefficients de la première ligne, $a_m^{11}, \ldots, a_m^{l1}$ ne seront pas nuls à la fois.

Si le coefficient a_m^{11} est nul, supposons, pour fixer les idées, que a_m^{21} ne le soit pas. Transformons $[CC_\nu]$ par la substitution T qui remplace

$$x''_m, \quad x''_{m-1}, \quad \ldots \qquad \text{par} \qquad x''_m + \lambda x'_m, \quad x''_{m-1} + \lambda x'_{m-1}, \quad \ldots,$$

et leurs $\nu^{\text{ièmes}}$ conjuguées

$$y''_m, \quad y''_{m-1}, \quad \ldots \qquad \text{par} \qquad y''_m + \lambda^{p^\nu} y'_m, \quad y''_{m-1} + \lambda^{p^\nu} y'_{m-1}, \quad \ldots.$$

Le coefficient a_m^{11} sera remplacé dans la transformée par un nouveau coefficient

$$a_m^{11} + \lambda a_m^{21} + \lambda^{p^\nu} a_m^{12} + \lambda^{p^\nu+1} a_m^{22}$$

qui ne pourra s'annuler que pour $p^\nu + 1$ valeurs de λ. Cette indéter-

minée étant susceptible de $p^{2\nu}$ valeurs distinctes pourra être choisie de telle sorte que le premier coefficient ne s'annule pas.

Supposons donc $a_m^{11} \gtrless 0$. Opérons la substitution T qui multiplie $x'_m, x'_{m-1}, \ldots$ par λ, et leurs conjuguées $y'_m, y'_{m-1}, \ldots$ par λ^{p^ν}; le premier coefficient deviendra

$$\lambda^{p^\nu+1} a_m^{11}$$

et pourra être rendu égal à l'unité; car, en vertu de la relation (2), on aura $(a_m^{11})^{p^\nu-1} = 1$ et, par suite, la congruence

$$\lambda^{p^\nu+1} a_m^{11} - 1 \equiv 0$$

aura $p^\nu + 1$ racines, car son premier membre divise

$$(\lambda^{p^\nu+1} a_m^{11})^{p^\nu-1} - 1 = \lambda^{p^{2\nu}-1} - 1.$$

Le premier coefficient a_m^{11} étant ainsi réduit à l'unité, on fera disparaître les autres coefficients $a_m^{12}, \ldots$ de la première ligne par la substitution T qui remplace

$$\begin{array}{llll} x'_m, \ x'_{m-1}, \ \ldots & \text{par} & x'_m - a_m^{12} x''_m - \ldots, & x'_{m-1} - a_m^{12} x''_{m-1} - \ldots, \\ y'_m, \ y'_{m-1}, \ \ldots & \text{par} & y'_m - (a_m^{12})^{p^\nu} y''_m - \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Les coefficients $a_m^{21}, \ldots$ de la première colonne, liés aux précédents par la relation (1), disparaîtront en même temps.

Par des opérations analogues, on réduira le second coefficient diagonal a_m^{22} à l'unité, et les autres coefficients de la seconde ligne et de la seconde colonne à zéro, et ainsi de suite. Finalement, φ se trouvera réduit à la forme canonique

$$\varphi = \mathrm{A} \sum [x_0^\alpha y_m^\alpha + (-1)^m x_m^\alpha y_0^\alpha].$$

24. Le nombre $\omega''_{l,\nu}$ des fonctions distinctes φ réductibles à cette forme type s'obtiendra évidemment en divisant le nombre total $\mathcal{N}''_{l,2\nu}$ des substitutions de la forme

$$(4) \quad \left| \begin{array}{llll} x', \ x'', \ \ldots, & c_1 x' + d_1 x'' + \ldots, & c_2 x' + d_2 x'' + \ldots, & \ldots \\ y', \ y'', \ \ldots, & c_1^{p^\nu} y' + d_1^{p^\nu} y'' + \ldots, & c_2^{p^\nu} y' + d_2^{p^\nu} y'' + \ldots, & \ldots \end{array} \right|$$

par le nombre $N_{l,\nu}$ de celles de ces substitutions qui transforment l'expression canonique ci-dessus en elle-même.

Cherchons à déterminer ce dernier nombre.

Les coefficients c, d, ... devront satisfaire aux relations suivantes :

$$c_1^{p^\nu+1} + c_2^{p^\nu+1} + \ldots + c_l^{p^\nu+1} \equiv 1,$$
$$c_1 d_1^{p^\nu} + c_1^{p^\nu} d_1 + c_2 d_2^{p^\nu} + \ldots \equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Déterminons d'abord le nombre $M_{l,\nu}$ des solutions de la première de ces congruences.

On peut y satisfaire de $M_{l-1,\nu}$ manières en posant

$$c_2^{p^\nu+1} + \ldots + c_l^{p^\nu+1} \equiv 1, \qquad c_1 = 0.$$

On aura d'autre part

$$p^{2\nu(l-1)} - M_{l-1,\nu}$$

manières de déterminer c_2, ..., c_l, de telle sorte que l'on ait

$$c_2^{p^\nu+1} + \ldots + c_l^{p^\nu+1} \lesseqgtr 1.$$

A chacun de ces systèmes de valeurs correspondront $p^\nu + 1$ valeurs de c_1 qui seront des polynomes en ρ; car la congruence proposée, élevée à la puissance p^ν, donnera, en remarquant que $c_2^{p^{2\nu}} \equiv c_2$, ..., $c_l^{p^{2\nu}} \equiv c_l$,

$$c_1^{p^{2\nu}+p^\nu} + c_2^{p^\nu+1} + \ldots + c_l^{p^\nu+1} \equiv 1$$

et, par suite,

$$c_1^{p^{2\nu}+p^\nu} \equiv c_1^{1+p^\nu}, \qquad \text{ou} \qquad c_1^{p^{2\nu}} \equiv c_1.$$

On a donc la formule récurrente

$$M_{l,\nu} = M_{l-1,\nu} + [p^{2\nu(l-1)} - M_{l-1,\nu}](p^\nu + 1) = p^{\nu(2l-1)} + p^{\nu(2l-2)} - p^\nu M_{l-1,\nu}.$$

D'ailleurs

$$M_{1,\nu} = p^\nu + 1$$

et, par suite,

$$M_{2,\nu} = p^{3\nu} - p^\nu,$$
$$M_{3,\nu} = p^{5\nu} + p^{2\nu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et généralement

$$M_{l,\nu} = p^{\nu(2l-1)} + (-1)^{l-1} p^{\nu(l-1)} = p^{\nu(l-1)} [p^{\nu l} - (-1)^l].$$

25. Ce premier point établi, supposons qu'on ait assigné à $c_1, \ldots, c_\rho$ l'un quelconque des $M_{l,\nu}$ systèmes de valeurs précédents. Il existera des substitutions de l'espèce (4) où les c ont ce système de valeurs. Elles seront toutes le produit de l'une d'elles, T_1, par des substitutions de la forme

$$U = \begin{vmatrix} x', \ x'', \ x''' & x' + d_1 x'' + e_1 x''' + \ldots, & d_2 x'' + e_2 x''' + \ldots, & \ldots \\ y', \ y'', \ y''' & y' + d_1^{p^\nu} y'' + e_1^{p^\nu} y''' + \ldots, & d_2^{p^\nu} y'' + e_2^{p^\nu} x''' + \ldots, & \ldots \end{vmatrix}.$$

La substitution T_1 transforme φ en une fonction φ_1 où le coefficient du terme en $x'_0 y'_m$ n'a pas changé. On peut déterminer une substitution U_1 de la forme

$$U_1 = \begin{vmatrix} x' & x' + d_1 x'' + e_1 x''' \\ y' & y' + d_1^{p^\nu} y'' + e_1^{p^\nu} y''' \end{vmatrix},$$

qui transforme φ_1 en une nouvelle fonction φ_2 ne contenant plus de termes en $x'_0 y''_m$, $x'_0 y'''_m$, et par suite se réduisant à la forme

$$A [x'_0 y'_m + (-1)^m x'_m y'_0] + \Psi',$$

Ψ' ne contenant plus les variables x', y'. On peut déterminer une substitution U_2 de la forme

$$U_2 = \begin{vmatrix} x'', \ x''', \ \ldots & d_2 x'' + e_2 x''' + \ldots, & \ldots \\ y'', \ y''', \ \ldots & d_2^{p^\nu} y'' + e_2^{p^\nu} y''' + \ldots, & \ldots \end{vmatrix},$$

qui ramène Ψ' à sa forme normale

$$A \sum_2^l [x_0^\alpha y_m^\alpha + (-1)^m x_m^\alpha y_0^\alpha].$$

La substitution $T_1 U_1 U_2$ transforme ainsi φ en elle-même; et les substitutions de la forme $T_1 U$ qui jouissent de cette propriété seront

le produit de cette substitution particulière par une nouvelle substitution U′ de la forme U qui transforme φ en elle-même.

Or, pour que cette substitution opérée sur φ n'y introduise aucun terme en $x'_0 y''_m$, $x'_0 y'''_m$, ..., il faut évidemment que les coefficients d_1, e_1, ... soient nuls : U′ se réduira donc à la forme

$$\begin{vmatrix} x'', & x''', & \ldots & d_2 x'' + e_2 x''' + \ldots, & \ldots \\ y'', & y''', & \ldots & d_2^{p^\nu} y'' + e_2^{p^\nu} y''' + \ldots, & \ldots \end{vmatrix},$$

et les coefficients d_2, e_2, ... devront être choisis de telle sorte que cette substitution n'altère pas la forme

$$A \sum_2^l [x_0^\alpha y_m^\alpha + (-1)^m x_m^\alpha y_0^\alpha].$$

Le nombre des systèmes de valeurs qu'on peut leur assigner sera donc $N_{l-1,\nu}$.

Nous obtenons donc la formule récurrente

$$N_{l,\nu} = M_{l,\nu} N_{l-1,\nu} = \prod_1^l M_{k,\nu} = p^{\nu\frac{l(l-1)}{2}} \prod_1^l [p^{\nu k} - (-1)^k],$$

et par suite

$$\omega_{l,\nu}^p = \frac{\mathcal{A}_{l,2\nu}^p}{N_{l,\nu}} = p^{\nu\frac{l(l-1)}{2}} \prod_1^l [p^{\nu k} + (-1)^k].$$

26. La forme φ étant ainsi réduite, les termes de rang maximum dans la fonction $|CC_\nu|$ seront les suivants :

$$A \sum_\alpha [x_0^\alpha y_m^\alpha - x_1^\alpha y_{m-1}^\alpha + \ldots + (-1)^m x_m^\alpha y_0^\alpha] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, l).$$

D'ailleurs $|CC_\nu|$ peut contenir des termes de la forme

$$c x_0^\alpha y_r^\beta, \qquad \text{où} \qquad \alpha \leq l, \qquad \beta > \alpha, \qquad r < m.$$

Le nombre de ces termes possibles sera

$$l[\mu - (m+1)l] + \frac{l(l-1)}{2} m = \frac{l}{2}[2\mu - m - (m+2)l],$$

et le coefficient de chacun d'eux sera susceptible de $p^{2\nu}$ valeurs distinctes. Ces

$$p^{\nu l[2\mu - m - (m+2)l]}$$

systèmes de valeurs sont tous également admissibles. Car nous allons voir que, quelle que soit l'hypothèse adoptée, on pourra, par des substitutions qui n'altèrent pas l'expression de S, détruire successivement tous ces coefficients.

En effet, supposons que nous nous soyons déjà débarrassé de tous ceux de ces termes dont le rang est $> r$.

Nous ferons disparaître à son tour l'un quelconque $c x_0^\alpha y_r^\beta$ des termes de rang r sans rétablir aucun des termes déjà détruits en opérant une substitution de la forme

$$\mathrm{T} = \begin{vmatrix} x_m^\alpha, & \ldots, & x_{m-r}^\alpha, & x_m^\alpha + \lambda x_r^\beta, & \ldots, & x_{m-r}^\alpha + \lambda x_0^\beta \\ y_m^\alpha, & \ldots, & y_{m-r}^\alpha, & y_m^\alpha + \lambda^{p^\nu} y_r^\beta, & \ldots, & y_{m-r}^\alpha + \lambda^{p^\nu} y_0^\beta \end{vmatrix}.$$

Cette opération accroîtra φ de certains termes tous de rang $< r$, sauf une partie de ceux qui proviennent des termes de rang m écrits ci-dessus. Parmi les nouveaux termes de rang r ainsi introduits, deux seulement

$$\mathrm{A}\lambda^{p^\nu} x_0^\alpha y_r^\beta \quad \text{et} \quad (-1)^{m-r} \mathrm{A}\lambda x_0^\beta y_r^\alpha,$$

provenant respectivement des deux termes

$$\mathrm{A} x_0^\alpha y_m^\alpha \quad \text{et} \quad (-1)^{m-r} \mathrm{A} x_{m-r}^\alpha y_r^\alpha,$$

contiendront une variable x avec l'indice zéro; le second n'est pas de ceux que nous cherchons à faire disparaître; et le premier viendra détruire le terme $c x_0^\alpha y_r^\beta$ si l'on détermine λ par la condition

$$\mathrm{A}\lambda^{p^\nu} + c = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda \equiv (-\mathrm{A}^{-1} c)^{p^\nu}.$$

Après cette nouvelle réduction, celles des fonctions bilinéaires par-

tielles $[\alpha\beta]$, où $\alpha = 1, \ldots, l$, et $\beta > \alpha$ ne contenant plus la variable x_0^α, seront identiquement nulles. Les fonctions conjuguées $[\beta\alpha]$ auront disparu en même temps, de sorte que l'expression de $[CC_\nu]$ sera réduite à

$$[CC_\nu] = \sum_1^l [\alpha\alpha] + \Psi,$$

Ψ étant une nouvelle fonction où ne figurent plus les variables $x', \ldots, x^l; y', \ldots, y^l$.

27. Achevons la réduction de la fonction partielle $[\alpha\alpha]$. Elle est de la forme

$$\sum_r a_r^{\alpha\alpha} F_{\alpha\alpha r},$$

et le premier coefficient $a_m^{\alpha\alpha}$ a déjà été réduit à l'unité. Chacun des autres, en nombre m, satisfaisant à la relation $(a_r^{\alpha\alpha})^{p^\nu} \equiv a_r^{\alpha\alpha}$, sera susceptible de p^ν valeurs distinctes, et comme nous avons l fonctions $[\alpha\alpha]$, nous pourrons faire en tout $p^{\nu l m}$ hypothèses sur les valeurs de leurs coefficients. Elles sont également admissibles, car nous allons montrer qu'en toute hypothèse on pourra, en opérant sur $[CC_\nu]$ une substitution convenable de l'espèce T, rendre nuls successivement tous les coefficients $a_r^{\alpha\alpha}$, où $r < m$.

Supposons, en effet, que nous ayons déjà réussi à annuler les coefficients $a_{m-1}^{\alpha\alpha}, \ldots, a_{r+1}^{\alpha\alpha}$ de telle sorte que $[\alpha\alpha]$ se réduise à la forme

$$F_{\alpha\alpha m} + a_r^{\alpha\alpha} F_{\alpha\alpha r} + \ldots.$$

Pour détruire le coefficient $a_r^{\alpha\alpha}$ opérons la substitution

$$\left| \begin{matrix} x_m^\alpha, \ldots, x_{m-r}^\alpha & x_m^\alpha + \lambda x_r^\alpha, & \ldots, x_{m-r}^\alpha + \lambda x_0^\alpha \\ y_m^\alpha, \ldots, y_{m-r}^\alpha & y_m^\alpha + \lambda^{p^\nu} y_r^\alpha, & \ldots, y_{m-r}^\alpha + \lambda^{p^\nu} y_{m-r}^\alpha \end{matrix} \right|,$$

λ étant indéterminée.

L'accroissement Δ de $[\alpha\alpha]$ sera une nouvelle forme invariante dont aucun terme ne sera de rang $> r$; il sera donc de la forme

$$b_r F_{\alpha\alpha r} + b_{r-1} F_{\alpha\alpha, r-1} + \ldots$$

et la réduction demandée sera obtenue si $b_r = -a_r^{\alpha\alpha}$. Or on peut toujours arriver à ce résultat.

1° En effet, supposons en premier lieu m pair, $m = 2m'$ et r pair, $r = 2r'$, et comparons les coefficients de $x_{r'}^{\alpha} y_{r'}^{\alpha}$ dans $a_r^{\alpha\alpha} F_{\alpha\alpha r}$ et dans Δ. Le premier sera égal à $a_r^{\alpha\alpha}$; dans Δ nous aurons deux termes de ce genre, provenant de la variation des deux termes $(-1)^{m'-r'} x_{r'}^{\alpha} y_{m-r'}^{\alpha}$ et $(-1)^{m'-r'} y_{r'}^{\alpha} x_{m-r'}^{\alpha}$. La somme de leurs coefficients est

$$(-1)^{m'-r'}(\lambda^{p^\nu}+\lambda).$$

On aura donc à déterminer λ par la congruence

$$(-1)^{m'-r'}(\lambda^{p^\nu}+\lambda)+a_r^{\alpha\alpha}\equiv 0.$$

2° Si $m = 2m' - 1$ et $r = 2r'$, le terme en $x_{r'}^{\alpha} y_{r'}^{\alpha}$ dans Δ proviendra de la variation des deux termes

$$e(-1)^{m'-1-r'} x_{r'}^{\alpha} y_{m-r'}^{\alpha} \quad \text{et} \quad -e(-1)^{m'-1-r'} y_{r'}^{\alpha} x_{m-r'}^{\alpha},$$

et l'on aura la congruence

$$(-1)^{m'-r'} e(\lambda^{p^\nu}-\lambda)+a_r^{\alpha\alpha}\equiv 0.$$

3° Si $r = 2r' - 1$, on comparera les coefficients des deux termes en $x_{r'-1}^{\alpha} y_{r'}^{\alpha}$. Dans $a_r^{\alpha\alpha} F_{\alpha\alpha r}$, il sera égal à $ea_r^{\alpha\alpha}$; et, dans Δ, le terme correspondant proviendra de la variation des deux termes en $x_{r'-1}^{\alpha} y_{m-r'+1}^{\alpha}$ et en $y_{r'}^{\alpha} x_{m-r'}^{\alpha}$, et aura pour coefficient, si $m = 2m'$,

$$(-1)^{m'-r'+1}\lambda^{p^\nu}+(-1)^{m'-r'}\lambda,$$

et, si $m = 2m' - 1$,

$$e(-1)^{m'-r'}\lambda^{p^\nu}+e(-1)^{m'-r'}\lambda.$$

On aura donc dans le premier cas la congruence

$$(-1)^{m'-r'+1}(\lambda^{p^\nu}+\lambda)+ea_r^{\alpha\alpha}\equiv 0,$$

et dans le second celle-ci :

$$(-1)^{m'-r'} e(\lambda^{p^\nu}+\lambda)+ea_r^{\alpha\alpha}\equiv 0.$$

Or, chacune des quatre congruences ci-dessus admet pour racines des entiers complexes formés avec ρ. En effet, considérons la dernière, par exemple; élevons-la à la puissance p^ν; il viendra, en tenant compte des relations $e^{p^\nu} \equiv -e$, $a^{p^\nu} \equiv a$,

$$(-1)^{m'-r'-1} e(\lambda^{p^{2\nu}} + \lambda^{p^\nu}) - e a_r^{\alpha\alpha} \equiv 0,$$

et, en ajoutant cette équation à la primitive et supprimant un facteur commun,

$$\lambda^{p^{2\nu}} - \lambda \equiv 0.$$

On opérera de même sur chacune des trois autres congruences.

28. Il est donc établi que $[CC_\nu]$ peut se réduire à la forme

$$[CC_\nu] = \sum_1^l F_{\alpha\alpha m} + \Psi,$$

Ψ étant une nouvelle forme ne contenant plus les variables des séries $s_1, \ldots, s_l$, ni leurs conjuguées. On la réduira de même; et si C contient l' séries à $m'+1$ variables, l'' séries à $m''+1$ variables, etc., on trouvera finalement

$$[CC_\nu] = \sum_1^l F_{\alpha\alpha m} + \sum_{l+1}^{l+l'} F_{\beta\beta m'} + \sum_{l+l'+1}^{l+l'+l''} F_{\gamma\gamma m''} + \ldots,$$

expression réduite entièrement déterminée. Toutes les formes $[CC_\nu]$ sont donc équivalentes dans le groupe Γ.

Leur nombre résulte d'ailleurs immédiatement de l'analyse précédente. En le désignant par $O(m, l; m', l'; \ldots)$ et appelant de même $O(m', l'; \ldots)$ celui des formes invariantes de l'espèce Ψ, on aura la formule récurrente :

$$O(m, l; m', l'; \ldots) = \omega_{l,\nu}^{p} p^{\nu l[2\mu-(m+2)l]} O(m', l'; \ldots).$$

29. Il nous reste à déterminer le caractère quadratique de la forme

$$[s] = [CC_\nu] + [C_1 C_{\nu+1}] + \ldots + [C_{\nu-1} C_{2\nu-1}]$$

que nous venons d'apprendre à construire. En désignant par $F'_{\alpha\alpha m}$, $F''_{\alpha\alpha m}$ les expressions qui se déduisent de $F_{\alpha\alpha m}$ par le changement de ρ en ρ^p, ρ^{p^2}, ..., l'expression

$$\mathfrak{F}_\alpha = F_{\alpha\alpha m} + F'_{\alpha\alpha m} + \ldots + F^{\nu-1}_{\alpha\alpha m}$$

sera une forme invariante réelle où ne figure qu'une série de variables de chacune des classes conjuguées. $[s]$ étant une somme de formes de ce genre, son caractère sera le produit de leurs caractères.

Cherchons donc le caractère de la forme partielle $\mathfrak{F}_\alpha$.

Soit γ l'ensemble des termes de rang m que contient la forme $F_{\alpha\alpha m}$. On pourrait évidemment transformer $F_{\alpha\alpha m}$ en γ en opérant sur les variables y une substitution de la forme

$$\begin{vmatrix} y_m^\alpha & y_m^\alpha + \lambda_{m,m-1} \; y_{m-1}^\alpha + \ldots + \lambda_{m,0} \; y_0^\alpha \\ y_{m-1}^\alpha & y_{m-1}^\alpha + \lambda_{m-1,m-2} y_{m-2}^\alpha + \ldots + \lambda_{m-1,0} y_0^\alpha \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

dont le déterminant est l'unité. Opérant une transformation analogue sur les formes conjuguées, on voit que la forme $\mathfrak{F}_\alpha$ a le même discriminant que la forme

$$\varphi = \gamma + \gamma' + \ldots + \gamma^{\nu-1}$$

obtenue en ajoutant à γ ses diverses conjuguées γ', ..., $\gamma^{\nu-1}$, laquelle est également réelle.

50. Supposons d'abord m impair, $m = 2n - 1$. En posant

$$\gamma_k = e(-1)^k [x_{n-1-k}^\alpha y_{n+k}^\alpha - y_{n-1-k}^\alpha x_{n+k}^\alpha],$$

on aura

$$\gamma = \sum_0^n \gamma_k,$$

et par suite

$$\varphi = \gamma + \gamma' + \ldots + \gamma^{\nu-1} = \sum_0^n [\gamma_k + \gamma'_k + \ldots + \gamma_k^{\nu-1}] = \sum_0^n \varphi_k.$$

Chacune des formes partielles φ_k est réelle et a pour discriminant

l'unité. Elle est, en effet, bilinéaire par rapport à x^{α}_{n-1-k} et ses conjuguées d'une part (y^{α}_{n-1-k} étant la ν^{ieme} de ces conjuguées), à x^{α}_{n+k} et ses conjuguées d'autre part. Or on a

$$x^{\alpha}_{n-1-k} = X_0 + X_1\rho + \ldots + X_{2\nu-1}\rho^{2\nu-1},$$
$$x^{\alpha}_{n+k} \;= Y_0 + Y_1\rho + \ldots + Y_{2\nu-1}\rho^{2\nu-1},$$

les X, Y étant des variables réelles. En substituant aux variables complexes qui figurent dans φ_k leurs expressions en fonctions des X et des Y, les imaginaires disparaîtront et φ_k restera bilinéaire. Par un changement de variables opéré sur les Y on pourra la transformer dans la forme équivalente

$$X_0 Y_0 + \ldots + X_{2\nu-1} Y_{2\nu-1}.$$

Or, le discriminant de cette dernière est $(-1)^{2\nu} = +1$.

51. Si m est pair, $m = 2n$, nous poserons

$$\gamma_k = (-1)^k [x^{\alpha}_{n-k} y^{\alpha}_{n+k} + y^{\alpha}_{n-k} x^{\alpha}_{n+k}],$$
$$\delta = x^{\alpha}_n y^{\alpha}_n,$$

et nous aurons

$$\gamma = \delta + \sum_1^n \gamma_k,$$

d'où

$$\varphi = \delta + \delta' + \ldots + \sum_1^n [\gamma_k + \gamma'_k + \ldots].$$

Les formes partielles $\gamma_k + \gamma'_k + \ldots$ sont comme dans le cas précédent de discriminant 1. Mais il reste à déterminer le caractère du discriminant de la forme

$$\delta + \delta' + \ldots.$$

En remplaçant x^{α}_n et ses conjuguées par leurs expressions

$$x^{\alpha}_n = X_0 + X_1\rho + \ldots + X_{2\nu-1}\rho^{2\nu-1}, \qquad \ldots,$$

nous obtiendrions une forme réelle $\Psi(X_0, X_1, \ldots)$ dont on pourra reconnaître le type en cherchant le nombre des solutions de la congruence

$$\Psi = 0 \pmod{p}.$$

Or, si nous donnons à $X_0, \ldots, X_{2\nu-1}$ des valeurs réelles quelconques, le $k^{\text{ième}}$ conjugué de

$$x_n^\alpha = X_0 + X_1\rho + \ldots + X_{2\nu-1}\rho^{2\nu-1}$$

sera

$$X_0 + X_1\rho^{p^k} + \ldots + X_{2\nu-1}\rho^{(2\nu-1)p^k} \equiv (X_0 + X_1\rho + \ldots)^{p^k} \equiv (x_n^\alpha)^{p^k}.$$

En particulier, son $\nu^{\text{ième}}$ conjugué y_n^α sera $(x_n^\alpha)^{p^\nu}$.

Donc $X_0, \ldots, X_{2\nu-1}$ devront être choisis de telle sorte que l'entier complexe x_n^α satisfasse à la relation

$$(x_n^\alpha)^{p^\nu+1} + (x_n^\alpha)^{(p^\nu+1)p} + \ldots + (x_n^\alpha)^{(p^\nu+1)p^{\nu-1}} \equiv 0.$$

Celle-ci peut se décomposer en deux autres

$$(x_n^\alpha)^{p^\nu+1} \equiv z,$$
$$z + z^p + \ldots + z^{p^{\nu-1}} \equiv 0.$$

En élevant la première à la puissance p^ν et remarquant que

$$(x_n^\alpha)^{p^{2\nu}} \equiv x_n^\alpha,$$

on trouve que z doit satisfaire à la relation

$$z^{p^\nu} \equiv z.$$

Réciproquement, à chaque solution z de cette congruence correspondent $p^\nu + 1$ valeurs de x_n^α, sauf à la solution $z = 0$ à laquelle correspond la valeur unique $x_n^\alpha \equiv 0$.

Reste à trouver les solutions de la seconde congruence. Soit i une racine d'une congruence irréductible de degré ν

$$i^\nu + \lambda_1 i^{\nu-1} + \ldots \equiv 0. \tag{5}$$

Les racines de la congruence $z^{p^\nu} \equiv z$ auront pour forme générale

$$a + a_1 i + \ldots + a_{\nu-1} i^{\nu-1},$$

les a étant des entiers réels. Les quantités conjuguées z^p, z^{p^2} s'en déduiront en remplaçant dans cette expression la racine i par ses conjuguées. La congruence

$$z + z^p + \ldots + z^{p^{\nu-1}} \equiv 0$$

devient donc

$$(6) \qquad as_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_{\nu-1} s_{\nu-1} \equiv 0,$$

s_k désignant la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de la congruence (5). La congruence (6) ne peut être identiquement satisfaite, quelles que soient les valeurs des a, car la relation $\Psi \equiv 0$ serait alors satisfaite pour toutes les valeurs des variables X, ce qui est inadmissible. Donc elle déterminera un des ν nombres a en fonction des autres, qui resteront arbitraires. On aura donc pour z $p^{\nu-1}$ solutions parmi lesquelles la solution $z = 0$.

Le nombre des valeurs correspondantes de x_n^α sera

$$(p^{\nu-1} - 1)(p^\nu + 1) + 1 = p^{2\nu-1} - p^\nu + p^{\nu-1}.$$

Or, si D est le discriminant de la forme ψ, ce même nombre est déterminé (n° **6**) par la formule

$$p^{2\nu-1} + (p^\nu - p^{\nu-1})\left(\frac{-1}{p}\right)^\nu \left(\frac{D}{p}\right), \qquad \text{si } p \text{ est impair;}$$

$$2^{2\nu-1} - 2^{\nu-1}(-1)^\nu \left(\frac{2}{D}\right), \qquad \text{si } p = 2.$$

La comparaison de ces formules donne la relation

$$\left(\frac{D}{p}\right) = -\left(\frac{-1}{p}\right)^\nu, \qquad \text{si } p \text{ est impair}$$

$$\left(\frac{2}{D}\right) = (-1)^{\nu+1}, \qquad \text{si } p = 2.$$

52. A chaque série de la classe C qui contient un nombre impair de variables correspond dans l'expression réduite [S] une forme partielle de ce genre. Or le nombre des séries à un nombre impair de variables est évidemment de même parité que le nombre total μ des variables de la classe. Le caractère quadratique de [S] sera donc

$$(-1)^{\mu}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\mu\nu}, \qquad \text{si } p \text{ est impair};$$
$$(-1)^{\mu(\nu+1)}, \qquad \text{si } p = 2.$$

III.

53. Soit enfin C une classe dont le multiplicateur ρ soit égal à ± 1 $(\bmod p)$. Elle sera sa propre associée.

Soient encore $s_1, s_2, \ldots$ les séries qui forment la classe C; $x_0, \ldots, x_{m_\alpha}$ les variables en nombre $m_\alpha + 1$ de la série s_α; soient enfin, comme précédemment,

$$m_1 = \ldots = m_l = m, \qquad m_{l+1} = \ldots = m_{l+l'} = m' < m, \qquad \ldots.$$

La forme invariante [C] que nous nous proposons de construire aura pour expression

$$[\mathrm{C}] = \sum [\alpha\beta] + \sum [\alpha\alpha],$$

$[\alpha\beta]$ étant une fonction bilinéaire des variables de deux séries différentes s_α, s_β, et $[\alpha\alpha]$ une forme quadratique par rapport aux variables d'une seule série s_α.

Chacune des fonctions $[\alpha\beta]$, $[\alpha\alpha]$ devra être invariante séparément.

On trouvera, comme dans le premier cas, l'expression générale des formes $[\alpha\beta]$

$$[\alpha\beta] = \sum_r a_r^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta r},$$

les a étant des constantes réelles, car ρ est ici réel.

54. Passons à la considération des formes quadratiques.

Le rang r de l'une quelconque d'entre elles $[\alpha\alpha]$ *sera un nombre pair et ne pourra surpasser* m_α *si p est impair,* $m_\alpha+1$ *si* $p=2$.

Supposons, en effet, r impair $=2n+1$. L'ensemble des termes de rang r dans $[\alpha\alpha]$ sera

$$a_0 x_0^\alpha x_{2n+1}^\alpha + a_1 x_1^\alpha x_{2n}^\alpha + \ldots + a_n x_n^\alpha x_{n+1}^\alpha$$

(en supposant identiquement nuls les coefficients de ceux de ces termes où figureraient des variables d'indice $> m_\alpha$).

La substitution S transforme $[\alpha\alpha]$ en $[\alpha\alpha]+\Delta$, Δ devant être identiquement nul. Or les termes de rang maximum dans Δ proviennent exclusivement des termes de rang r écrits ci-dessus : ils sont les suivants :

$$(a_0+a_1)x_0^\alpha x_{2n}^\alpha + (a_1+a_2)x_1^\alpha x_{2n-1}^\alpha + \ldots + a_n x_n^\alpha x_n^\alpha$$

et ne pourraient disparaître qu'en supposant nuls tous les coefficients a.

Soit r pair $=2n$. Les termes de rang maximum seront dans $[\alpha\alpha]$

$$a_0 x_0^\alpha x_{2n}^\alpha + a_1 x_1^\alpha x_{2n-1}^\alpha + \ldots + a_n x_n^\alpha x_n^\alpha$$

et dans Δ

$$(a_0+a_1)x_0^\alpha x_{2n-1}^\alpha + (a_1+a_2)x_1^\alpha x_{2n-2}^\alpha + (a_{n-1}+2a_n)x_{n-1}^\alpha x_n^\alpha.$$

Pour qu'ils disparaissent, il faut qu'on ait

$$2a_n \equiv -a_{n-1} \equiv a_{n-2} \equiv \ldots \equiv (-1)^n a_0.$$

Donc, si p est impair, aucun des coefficients a ne sera nul, car tous le seraient. D'ailleurs, si $2n$ était $> m_\alpha$, la variable x_{2n}^α ne figurant pas dans s_α, il faudrait poser $a_0=0$; donc $r=2n \leqq m_\alpha$.

Les termes de rang maximum dans $[\alpha\alpha]$ seront, par suite (si p est impair),

$$a_n[x_n^\alpha x_n^\alpha - 2x_{n-1}^\alpha x_{n+1}^\alpha + \ldots + (-1)^n 2x_0^\alpha x_{2n}^\alpha].$$

On voit par là que la forme $[\alpha\alpha]$, si elle n'est pas identiquement nulle, contient au moins un terme où x_0^α est multiplié par une autre variable x_{2n}^α de rang pair.

Si $p = 2$, les relations précédentes donneront

$$a_0 \equiv a_1 \equiv \ldots \equiv a_{n-1} \equiv 0 \qquad (\bmod 2),$$

et les termes de rang maximum $2n$ se réduiront à un seul

$$a_n x_n^\alpha x_n^\alpha.$$

Passons, dans ce cas, à la considération des termes de rang $2n - 1$ contenus dans $[\alpha\alpha]$, à savoir

$$b_0 x_0^\alpha x_{2n-1}^\alpha + b_1 x_1^\alpha x_{2n-1}^\alpha + \ldots + b_{n-1} x_{n-1}^\alpha x_n^\alpha.$$

Dans Δ les termes de rang $2n - 2$ dériveront exclusivement de ces termes et du terme $a_n x_n^\alpha x_n^\alpha$ et seront les suivants :

$$(b_0 + b_1) x_0^\alpha x_{2n-2}^\alpha + (b_1 + b_2) x_1^\alpha x_{2n-3}^\alpha + \ldots + (b_{n-1} + a_n) x_{n-1}^\alpha x_{n-1}^\alpha.$$

Pour qu'ils s'annulent, il faut poser

$$b_0 \equiv b_1 \equiv \ldots \equiv b_{n-1} \equiv a_n \qquad (\bmod 2),$$

de sorte que l'ensemble des termes de rang $2n$ ou $2n - 1$ dans $[\alpha\alpha]$ sera

$$a_n [x_n^\alpha x_n^\alpha + x_{n-1}^\alpha x_n^\alpha + x_{n-2}^\alpha x_{n+1}^\alpha + \ldots + x_0^\alpha x_{2n-1}^\alpha].$$

D'ailleurs, $r = 2n \leqq m_\alpha + 1$, sans quoi le terme en x_{2n-1}^α ne pourrait exister.

55. Cela posé, il est facile de construire une forme invariante particulière $G_{\alpha n}$, telle que parmi ses termes de rang maximum figure le carré $x_n^\alpha x_n^\alpha$ avec le coefficient 1. Si p est impair, on pourra prendre

$$G_{\alpha n} = x_n^\alpha x_n^\alpha - 2 x_{n+1}^\alpha x_{n-1}^\alpha + \ldots + (-1)^n 2 x_{2n}^\alpha x_0^\alpha$$
$$+ \sum (-1)^{k+k'} (2k + k') \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+k'-1)}{1.2\ldots k'} x_{n+k} x_{n-k-k'}$$
$$(k' > 0, \; k + k' \leqq n),$$

et, si $p = 2$,

$$G_{\alpha n} = x_n^\alpha x_n^\alpha + x_{n-1}^\alpha x_n^\alpha + x_{n-2}^\alpha (x_{n+1}^\alpha + x_n^\alpha) + x_{n-3}^\alpha (x_{n+2}^\alpha + 2 x_{n+1}^\alpha + x_n^\alpha) + \ldots$$
$$+ x_{n-1-k}^\alpha \left[x_{n+k}^\alpha + k x_{n+k-1}^\alpha + \frac{k(k-1)}{2} x_{n+k-2}^\alpha + \ldots + x_n^\alpha \right] + \ldots.$$

Pour vérifier l'invariance de ces formes, il suffit de remarquer que dans l'accroissement Δ que leur fait subir la substitution S, un terme en $x_i^\alpha x_{i'}^\alpha$ peut provenir de trois termes de $G_{\alpha n}$; ceux en $x_{i+1}^\alpha x_{i'}^\alpha$, en $x_i^\alpha x_{i'+1}^\alpha$ ou en $x_{i+1}^\alpha x_{i'+1}^\alpha$, et son coefficient sera la somme de leurs coefficients; or on constate sans peine que cette somme est nulle, quels que soient i et k.

On aura évidemment

$$[\alpha\alpha] = a_n G_{\alpha n} + R,$$

R étant une nouvelle forme invariante de rang moindre qu'on pourra réduire de même. On aura ainsi finalement l'expression générale des fonctions $[\alpha\alpha]$, à savoir

$$[\alpha\alpha] = \sum_n a_n^{\alpha\alpha} G_{\alpha n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de n qui ne surpassent pas $\frac{1}{2}(m_\alpha + 1)$.

On aura donc, pour l'expression générale de la forme $[C]$,

$$[C] = \sum_{\alpha,\beta} \sum_r a_r^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta r} + \sum_\alpha \sum_r a_r^{\alpha\alpha} G_{\alpha r},$$

les a étant des entiers réels.

56. Il reste à réduire les fonctions que cette expression représente à leurs formes types, et à déterminer leur nombre.

Nous avons supposé que les séries les plus longues $s_1, \ldots, s_l$ étaient au nombre de l et contenaient chacune $m + 1$ variables.

Nous traiterons d'abord le cas où p est impair.

Il se subdivise en deux autres suivant que m est pair ou impair.

57. Premier cas : *p impair, $m = 2n$.* — Considérons les termes de $[\alpha\alpha]$ qui contiennent les carrés et les rectangles des variables $x_n, \ldots, x_n^l$. Ils constituent une forme quadratique φ que nous réduirons tout d'abord par une substitution de la forme

$$|x', x'', \ldots, a_1 x' + b_1 x'' + \ldots, a_2 x' + b_2 x'' + \ldots, \ldots|.$$

On la ramène à une forme équivalente

$$x'_n x'_n + x''_n x''_n + \ldots + 2^l \mathrm{D} x^l_n x^l_n$$

qui présente deux types distincts suivant que $\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)$ est égal à 1 ou à -1. Le nombre $\mathfrak{N}^p_l(\mathrm{D})$ des formes distinctes φ réductibles à chacun de ces types a été indiqué au n° **7**.

Nous avons laissé de côté le cas où le discriminant D de φ serait nul ; mais cette hypothèse est à rejeter ; car φ pourrait alors être transformé en une autre forme où l'une des variables, x^l_n par exemple, aurait disparu.

Mais il résulte de l'expression des fonctions f, G que, si x^l_{2n} figurait dans la forme $[\alpha\alpha]$, x^l_n devrait y figurer aussi au moins dans les termes de rang $2n$. Donc $[\alpha\alpha]$ ne contiendra pas x^l_{2n}, et son discriminant sera nul.

58. A cet instant de la réduction, les seuls termes du rang maximum qui contiennent les variables $x'_0, \ldots, x'_{2n}$ sont les suivants :

$$a^{11}_{2n}(x'_n x'_n - 2x'_{n+1} x'_{n-1} + \ldots + 2x'_{2n} x'_0),$$

a_{2l} étant égal à 1 si $l > 1$, à $2^l \mathrm{D}$ si $l = 1$.

Mais $[\alpha\alpha]$ peut encore contenir des termes où x'_0 soit multiplié par quelqu'une des $\mu - l - 2n$ variables de rang $< 2n$ et qui n'appartiennent pas à la série s_1. Ces termes peuvent être détruits aisément quels que soient leurs coefficients (dont chacun est susceptible de p valeurs distinctes).

Soit en effet $cx'_0 x^\alpha_r$ l'un de ces termes. En opérant la substitution

$$x'_{2n}, \ldots, x'_{2n-r} \quad x'_{2n} + \lambda x^\alpha_r, \ldots, x'_{2n-r} + \lambda x^\alpha_0 |,$$

le coefficient c sera changé en $2a^{11}_{2n}\lambda + c$, et s'annulera par un choix convenable de l'indéterminée λ. La substitution aura pu introduire d'autres termes en x'_0, mais leur rang sera $< r$. En répétant la réduction on fera disparaître tous les termes en question, en commençant par ceux dont le rang est le plus élevé.

39. A ce moment, dans l'expression générale de $[C]$ tous ceux des coefficients $a_r^{\alpha\beta}$ où $\alpha = 1$, $\beta < \alpha$ ont déjà disparu, de sorte que les variables $x'_0, \ldots, x'_m$ ne figureront plus que dans la fonction partielle

$$[11] = \Sigma a_r^{11} G_{1r}.$$

Les carrés des variables $x'_n, x'_{n-1}, \ldots, x'_0$ figurent dans cette expression avec les coefficients

$$a_n^{11}, \quad a_{n-1}^{11}, \quad a_{n-2}^{11}, \quad \ldots, \quad a_0^{11}.$$

Le premier de ces coefficients est déjà égal à l'unité. Les autres sont susceptibles de p^n systèmes de valeurs également acceptables, car on peut les faire disparaître à volonté.

Effectuons en effet la substitution

$$T = |x'_n, \ldots, x'_{n-2k} \quad x'_n + \lambda x'_{2k}, \ldots, x'_{2k} + \lambda x'_0|.$$

Le terme en $x_k'^2$ dans la fonction transformée aura pour coefficient $(-1)^{n-k} 2\lambda + a_k^{11}$ et s'annulera par un choix convenable de λ, les termes de rang plus élevé n'étant pas modifiés. On pourra donc annuler progressivement tous les coefficients en question en commençant par ceux dont le rang est le plus élevé.

40. La partie de $[C]$ qui contient les variables $x'_0, \ldots, x'_{2n}$ est ainsi réduite à G_{1n}. On réduira de même celle qui contient les variables $x''_0, \ldots, x''_{2n}$ à G_{2n}, etc.; enfin celle qui contient les variables x_0^l à $2^l DG_{ln}$; et l'on aura à ce moment

$$[C] = G_{1n} + G_{2n} + \ldots + 2^l DG_{ln} + \Psi,$$

Ψ étant une forme invariante qui ne contient plus les variables des l premières séries et qui restera à réduire.

Le nombre $O(l, 2n : l', m', \ldots)$ des formes distinctes $[C]$ réductibles à la forme ci-dessus sera d'ailleurs égal à celui $O(l, m', \ldots)$ des formes distinctes de l'espèce Ψ, multiplié par $\mathfrak{G}_l^n(D)$ et par le nombre des valeurs dont sont susceptibles les coefficients arbitraires qu'on a pu faire disparaître dans les dernières phases de la réduction, à savoir

$$p^{\mu-l-2n} p^n p^{\mu-(l-1)-2n} p^n \ldots = \ldots = p^{l(\mu-n) - \frac{l(l+1)}{2}}.$$

On a ainsi la formule suivante

$$\mathrm{O}(l, 2n; l, m'; \ldots) = \mathfrak{B}_l^p(\mathrm{D})\, p^{l(\mu-n)-\frac{l(l+1)}{2}}\,\mathrm{O}(l', m'; \ldots).$$

41. Deuxième cas : *p impair, m impair* $= 2n-1$. — Les formes G, où le rang maximum des termes est pair et $\leqq m$, ne pourront contenir les variables $x'_m, \ldots, x^l_m$. La partie de [C] qui les contient sera la forme bilinéaire

$$\varphi = \sum_{\alpha, \beta} a_m^{\alpha\beta} x_0^\alpha x_m^\beta,$$

dont le déterminant n'est pas nul. Il est d'ailleurs gauche, en vertu des relations

$$a_m^{\alpha\beta} \equiv (-1)^m a_m^{\beta\alpha} \equiv -a_m^{\beta\alpha}.$$

Donc *l sera nécessairement un nombre pair.*

Écrivons donc $2l$ au lieu de l.

L'expression de φ pourra représenter (n° 8) $\mathfrak{S}^p_{2l}$ formes distinctes, mais toutes réductibles à la forme type unique

$$\sum_1^l (x_0^{2k-1} x_m^{2k} - x_0^{2k} x_m^{2k-1}).$$

42. Après cette première réduction, les termes de rang maximum dans [C] seront les suivants :

$$\sum_1^l [x_0^{2k-1} x_m^{2k} - x_1^{2k-1} x_{m-1}^{2k} + \ldots - x_m^{2k-1} x_0^{2k}].$$

Mais [C] pourra contenir encore : 1° des termes contenant les carrés de celles des variables x_ρ^α où $\alpha \leqq 2l$, $\rho < n$; 2° des termes en $x_0^\alpha x_\rho^\beta$ où $\alpha \leqq 2l$, $\beta > \alpha$ et $\rho < 2n-1$.

Le nombre total des termes de ce genre est évidemment

$$2l\,2n + 2l(\mu - 4ln)$$
$$+ \frac{2l(2l-1)}{2}(2n-1) = l[2\mu - (2n+1)(2l-1)],$$

et leurs coefficients seront susceptibles chacun de p valeurs distinctes. Mais, quelque hypothèse que l'on fasse sur les valeurs initiales de ces coefficients, il sera aisé de les annuler successivement.

Supposons, en effet, qu'on ait déjà fait disparaître de [C] tous les termes de l'espèce considérée dont le rang est $> r$, et aussi tous ceux de rang r où $\alpha < 2k - 1$. Nous pourrons faire disparaître ceux dont le rang est r et où $\alpha = 2k - 1$ ou $2k$.

1° En effet, si [C] contient un terme $cx_0^{2k-1}x_r^\beta$, appliquons la substitution

$$T = |x_m^{2k}, \ldots, x_{m-r}^{2k} \quad x_m^{2k} - cx_r^\beta, \ldots, x_{m-r}^{2k} - cx_0^\beta|,$$

[C] se trouvera accru de termes tous de rang $< r$, sauf ceux provenant de l'accroissement des termes de rang m, lesquels seront de rang r. Parmi ceux-ci, un seul $-cx_0^{2k-1}x_r^\beta$ (provenant du terme $x_0^{2k-1}x_m^{2k}$) sera de l'espèce considérée, et viendra détruire celui dont nous avons supposé l'existence.

2° Si r est un nombre pair 2ρ, et que [C] contienne un terme

$$cx_\rho^{2k-1}x_\rho^{2k-1},$$

on appliquera la substitution

$$T = |x_m^{2k}, \ldots, x_{m-r}^{2k} \quad x_m^{2k} - (-1)^\rho cx_r^{2k-1}, \ldots, x_{m-r}^{2k} - (-1)^\rho cx_0^{2k-1}|.$$

Les termes dont elle accroît [C] seront de rang $< r$, sauf ceux fournis par les termes de rang m, lesquels seront de rang r. Un seul de ces derniers,

$$-cx_\rho^{2k-1}x_\rho^{2k-1}$$

[provenant du terme $(-1)^\rho x_\rho^{2k-1}x_{m-\rho}^{2k}$] sera de l'espèce considérée, et détruira celui dont nous avons supposé l'existence.

3° Pour détruire ensuite successivement les termes de l'espèce considérée dont le rang est égal à r et où $\alpha = 2k$, on emploiera avec le même succès les substitutions

$$|x_m^{2k-1}, \ldots, x_{m-r}^{2k-1} \quad x_m^{2k-1} - cx_r^\beta, \ldots, x_{m-r}^{2k-1} - cx_0^\beta|$$

ou, si $r = 2\rho$,

$$|x_m^{2k-1}, \ldots, x_{m-r}^{2k-1}, x_m^{2k-1} - (-1)^\rho c x_r^{2k}, \ldots, x_{m-r}^{2k-1} - (-1)^\rho c x_0^{2k}|.$$

43. A ce moment la fonction $[\alpha\alpha]$ (si $\alpha \overline{\gtrless} 2l$) ne contenant plus le carré d'aucune des variables x_r^α sera identiquement nulle.

Les fonctions $[\alpha\beta]$ où $\alpha = 1, \ldots, 2l$ et $\beta > \alpha$ sont également nulles comme ne contenant pas la variable x_0^α, à moins qu'on n'ait à la fois $\alpha = 2k - 1$, $\beta = 2k$.

Enfin la fonction $[2k-1, 2k]$ ne contenant x_0^{2k-1} que dans le terme $x_0^{2k-1} x_{2n-1}^{2k}$ se réduira à $f_{2k-1,2k,2n-1}$

On aura donc

$$[C] = \sum_1^l f_{2k-1,2k,2n-1} + \Psi,$$

Ψ étant une nouvelle fonction invariante qui ne contient plus les variables des $2l$ premières séries.

Le nombre $O(2n-1, 2l; m', l'; \ldots)$ des fonctions distinctes $[C]$ sera lié à celui $O(m', l'; \ldots)$ des fonctions distinctes de l'espèce Ψ par la formule

$$O(2n-1, 2l, m', n', \ldots) = \mathfrak{S}_{2l}^p \, p^{l[2\mu-(2n+1)2l-1]} O(m', l', \ldots).$$

44. La réduction de la forme $[C]$ est ainsi ramenée, dans le cas de $m = 2n - 1$ comme dans celui de $m = 2n$, à la réduction d'une nouvelle forme Ψ ne contenant plus qu'une partie des variables primitives. En lui appliquant les mêmes procédés de réduction, on ramènera finalement $[C]$ à une somme de fonctions partielles n'ayant aucune variable commune et dont les unes, de l'espèce f, seront bilinéaires par rapport aux variables de deux séries, contenant chacune un même nombre pair de variables; les autres de l'espèce G contenant les variables d'une seule série en nombre impair.

Si donc on groupe les séries en sous-classes en réunissant ensemble celles de même longueur, *chacune des sous-classes où le nombre des variables est pair devra contenir un nombre pair de séries.* Cette condition est nécessaire pour l'existence de formes invariantes $[C]$.

Dans l'expression réduite de $[C]$ figure, d'ailleurs, pour chaque

sous-classe à un nombre impair de variables, un coefficient $2^l D$, multipliant la dernière des fonctions partielles G qui correspondent à cette sous-classe; et D peut être pris égal soit à l'unité, soit à un non-résidu quadratique de p choisi à volonté. Il existe donc 2^ρ types de formes [C], ρ désignant le nombre des sous-classes où le nombre des variables est impair.

45. Le caractère de la forme [C] est le produit des caractères des formes partielles qui la composent.

Or les formes bilinéaires f peuvent être ramenées, par un changement de variables, à une somme de rectangles

$$\sum X_k Y_k.$$

Le nombre de variables de chaque série étant pair, elles ont le caractère $+1$.

Quant aux formes G, une transformation linéaire opérée sur les variables $x_{n-1}, \ldots, x_0$ les ramène immédiatement à la forme équivalente

$$x_n x_n + x_{n+1} x_{n-1} + \ldots + x_{2n} x_0$$

dont le discriminant est $(-1)^n 2$. Leur caractère est donc

$$\left(\frac{-1}{p}\right)^n \left(\frac{2}{p}\right).$$

Enfin, le nombre des variables étant impair dans les formes G, le discriminant de $2^l D G_{ln}$ aura pour caractère

$$\left(\frac{-1}{p}\right)^n \left(\frac{2}{p}\right) \left(\frac{2^l D}{p}\right).$$

Par suite la forme partielle

$$G_{1n} + \ldots + G_{l-1,n} + 2^l D G_{ln}$$

aura pour caractère

$$\left(\frac{-1}{p}\right)^{ln} \left(\frac{D}{p}\right),$$

et le caractère de $[C]$ sera

$$\prod \left(\frac{-1}{p}\right)^{ln} \left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\sigma} \prod \left(\frac{D}{p}\right),$$

σ désignant le nombre des séries où le nombre $m+1$ des variables est de la forme $4n+1$.

46. Passons au cas où $p=2$.

Ici encore nous aurons à séparer les deux cas : m pair, ou m impair.

Troisième cas : *$p=2$, m pair $=2n$.* — Parmi les termes de rang maximum, ceux qui contiennent les variables $x'_{2n}, \ldots x^l_{2n}$ sont ceux de la forme bilinéaire

$$\sum a_{2n}^{\alpha\beta} x_0^{\alpha} x_{2n}^{\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, l \\ \beta = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}, \quad \beta \gtrless \alpha$$

dont le déterminant ne sera pas o mod 2.

Ce déterminant est congru mod 2 au discriminant de la forme quadratique

$$\varphi \doteq \sum a_{2n}^{\alpha\beta} x_n^{\alpha} x_n^{\beta} + \sum a_n^{\alpha\alpha} x_n^{\alpha} x_n^{\alpha},$$

constituée par ceux des termes de rang maximum qui contiennent les variables $x'_n, \ldots, x^l_n$.

Donc ce discriminant D n'est pas o mod 2, et *l est nécessairement pair*. Écrivons donc $2l$ à la place de l.

Par une substitution convenable opérée sur les x', x'', ..., x^{2l}, nous pourrons, suivant le signe du caractère quadratique $\left(\frac{2}{D}\right)$, ramener φ à l'une ou à l'autre des deux formes normales

$$\sum_1^l x_n^{2k-1} x_n^{2k}$$

ou

$$x_n^2 + x_n'^2 + \sum_1^l x_n^{2k-1} x_n^{2k}.$$

et le nombre des formes distinctes φ réductibles à chacun de ces types sera $\mathfrak{B}_{2l}^{2}(\mathrm{D})$ (n° **7**).

Les termes de rang maximum dans [C] seront dans le premier cas (en remarquant que $+1 \equiv -1 \pmod 2$)

$$\sum_{1}^{l} (x_0^{2k-1} x_{2n}^{2k} + x_1^{2k-1} x_{2n-1}^{2k} + \ldots + x_{2n}^{2k-1} x_0^{2k}).$$

Dans le second cas, les deux termes

$$x_n'^2 + x_n''^2$$

devront être ajoutés aux précédents.

47. A ce moment [C] peut encore contenir :

1° Les carrés de celles des variables x_ρ^α où $\alpha \leqq 2l$, $\rho < n$; 2° les produits de celles des variables x_0^α où $\alpha \leqq 2l$ par des variables x_ρ^β où $\beta > \alpha$, $\rho < 2n$.

Les termes de ce genre sont au nombre de

$$2ln + 2l[\mu - 2l(2n+1)] + \frac{2l(2l-1)}{2} 2n = 2l(\mu - 2ln - 2l),$$

et chacun d'eux est susceptible des deux valeurs 0, 1. Mais, quelles que soient leurs valeurs, on pourra les détruire successivement par les mêmes substitutions qu'au n° **42**.

Après leur disparition, suivant que $x_n'^2 + x_n''^2$ figure ou non dans l'expression réduite de φ, [C] sera ramenée à la forme

$$G_{1n} + G_{2n} + \sum_{1}^{l} f_{2k-1, 2k, 2n} + \Psi$$

ou à celle-ci

$$\sum_{1}^{l} f_{2k-1, 2k, 2n} + \Psi,$$

Ψ étant une nouvelle fonction invariante, qui ne contient plus les variables des $2l$ séries les plus longues.

Le nombre $O(2n, 2l; m', l'; \ldots)$ des formes distinctes [C] susceptibles d'être ramenées à l'un des deux types précédents sera lié au nombre $O(m', l'; \ldots)$ des formes distinctes de l'espèce Ψ par la formule récurrente

$$O(2n, 2l; m', l'; \ldots) = \mathfrak{N}^2_{2l}(D).2^{2l.\mu.2ln-2l)}O(m', l'; \ldots).$$

18. Quatrième cas : $p = 2$; *m impair* $= 2n - 1$. — Les termes de [C] où figurent les variables $x'_m, \ldots, x^l_m$ constituent une forme bilinéaire symétrique

$$\varphi = \sum_1^l b^\alpha x_0^\alpha x_m^\alpha + \sum_1^l a_m^{\alpha\beta} x_0^\alpha x_m^\beta \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, l & \\ \beta = 1, \ldots, l & \beta \gtrless \alpha \end{pmatrix}$$

de déterminant $\gtrless 0 \bmod 2$ et que nous allons réduire d'abord.

Supposons que l'un des coefficients diagonaux du déterminant, par exemple b^1, soit $\equiv 1 \bmod 2$. Par la substitution

$$\left| x' \quad x' - \sum a_m^{1\beta} x^\beta \right|$$

on ramènera φ à la forme

$$x'_0 x'_m + \varphi',$$

φ' ne contenant plus les variables x'_0, x'_m. Si l'un de ses coefficients diagonaux n'est pas nul (mod 2) on la réduira de même. On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une forme φ^i où tous les coefficients diagonaux soient nuls. Le déterminant de φ^i pourra être considéré comme gauche par rapport au module 2. Le nombre $l - i$ des couples de variables x_0^α, x_m^α que contient φ^i sera donc pair, et en réduisant φ^i à sa forme type (n° 8) on aura facilement

$$\varphi = x'_0 x'_m + \ldots + x^i_0 x^i_m + (x_0^{i+1} x_m^{i+2} - x_0^{i+2} x_m^{i+1}) + \ldots$$
$$+ (x_0^{l-1} x^l_m - x^l_0 x_m^{l-1}).$$

On peut, d'ailleurs, supposer $i < 3$. Considérons, en effet, la forme

$$x'_0 x'_m + x''_0 x''_m + x'''_0 x'''_m \qquad (\bmod 2).$$

Par le changement de variables suivant

$$\left| x', x'', x''' \quad x'+x''+x''', x'+x'', x'+x''' \right|,$$

elle serait transformée dans la suivante

$$x'_0 x'_m + (x''_0 x'''_m - x'''_0 x''_m) \qquad (\bmod 2),$$

où l'on n'a plus qu'un coefficient diagonal au lieu de trois.

Le nombre $l-i$ étant pair, et $i<3$, il faudra nécessairement supposer $i=1$ si l est impair; on n'aura donc dans ce cas qu'une réduite unique. Mais, si l est pair, on en aura deux, correspondant aux deux hypothèses $i=0$, $i=2$.

49. On obtiendra le nombre $\mathcal{C}^i_{ml}$ de formes distinctes φ réductibles à chacun de ces types en divisant le nombre total $\mathcal{A}^2_l = 2^{\frac{l(l-1)}{2}} \prod_1^l (2^k-1)$ des substitutions linéaires à l variables par le nombre N des substitutions linéaires qui transforment la forme réduite en elle-même.

1° Soit d'abord $i=0$; l étant pair, remplaçons-le par $2l$. On aura (n° 8) $N=\omega^2_{2l}$, d'où

$$\mathcal{C}^0_{2n\ 1,2l} = \frac{\mathcal{A}^2_{2l}}{\omega^2_{2l}} = \mathcal{C}^2_{2l}.$$

2° Soit $i=1$; l est impair, remplaçons-le donc par $2l+1$. La forme réduite sera

$$\varphi = x'_0 x'_m + \sum (x^{2k}_0 x^{2k+1}_m - x^{2k+1}_0 x^{2k}_m) \qquad (\bmod 2).$$

Pour qu'une substitution

$$\sigma = \left| \begin{array}{ll} x' & a_1 x' + b_1 x'' + c_1 x''' + \dots \\ x'' & a_2 x' + b_2 x'' + c_2 x''' + \dots \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right|$$

n'altère pas cette forme, il faut que l'on ait

$$\begin{array}{ll} a_1^2 + 2a_2 a_3 + \dots \equiv 1, & a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_5 + a_5 b_4 + \dots \equiv 0, \\ b_1^2 + 2b_2 b_3 + \dots \equiv 0, & a_2 c_3 + a_3 c_2 + a_4 c_5 + a_5 a_4 + \dots \equiv 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Des premières équations on déduit

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = c_1 = d_1 = \ldots = 0,$$

et le déterminant de la substitution se réduira à

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \ldots \\ b_3 & c_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Il ne doit pas être nul. On déduira donc des équations de droite

$$a_2 = a_3 = \ldots = 0,$$

de sorte que la substitution σ laisse x' invariable et se réduit à la forme

$$\begin{vmatrix} x'' & b_2 x'' + c_2 x''' + \ldots \\ x''' & b_3 x'' + c_3 x''' + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Elle devra laisser invariante la partie de φ indépendante des x'. On aura donc, comme dans le cas précédent, $N = \omega^2_{2l}$, et par suite

$$\mathcal{E}^1_{2n+1,2l+1} = \frac{\mathcal{A}^2_{2l+1}}{\omega^2_{2l}} = (2^{2l+1} - 1)\, 2^{2l} \mathcal{E}^2_{2l}.$$

3° Soit enfin $i = 2$; l est pair, remplaçons-le par $2l$. La forme canonique de φ sera

$$x'_0 x'_m + x''_0 x''_m + \sum_1^{l-1} (x_0^{2k+1} x_m^{2k+2} - x_m^{2k+1} x_0^{2k+2}).$$

Par la transformation

$$| \; x' \quad x' + x'' \; |$$

nous la changerons dans la suivante, qui se prête mieux au calcul,

$$x_0 x_m + x_0 x_m + x'_0 x'_m + \sum_1^{l-1} (x_0^{2k+1} x_m^{2k+2} - x_m^{2k+1} x_0^{2k+2}).$$

Cherchons à quelles conditions une substitution

$$\begin{vmatrix} x' & a_1 x' + b_1 x'' + c_1 x''' + \ldots \\ x'' & a_2 x' + b_2 x'' + c_2 x''' + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

n'altère pas cette forme.

On trouvera comme tout à l'heure que l'on doit avoir

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = c_1 = \ldots = 0.$$

D'ailleurs la substitution

$$\begin{vmatrix} x'' & x'' + \alpha_2 x' + \sum(\alpha_{2k+1} x^{2k+2} + \alpha_{2k+2} x^{2k+1}) \\ x''' & x''' + \alpha_3 x' \\ x^{\mathrm{IV}} & x^{\mathrm{IV}} + \alpha_4 x' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

où les $2l-1$ quantités α sont arbitraires, n'altère pas la forme; les autres substitutions inaltérantes résultent évidemment de celles-ci, en nombre 2^{2l-1}, combinées avec des substitutions de la forme plus simple

$$| x'', x''', \ldots \qquad b_2 x'' + c_2 x''' + \ldots, \; b_3 x'' + c_3 x''' + \ldots, \; \ldots |.$$

Celles-ci sont au nombre de ω^2_{2l-2}. On aura donc ici $\mathrm{N} = 2^{2l-1}\omega^2_{2l-2}$, et par suite

$$\varepsilon^2_{2n-1,2l} = \frac{\mathrm{N}^2_{2l}}{\omega^2_{2l-2}} = (2^{2l}-1)(2^{2l-1}-1)2^{2l-2}\varepsilon^2_{2l-2} = (2^{2l}-1)\varepsilon^2_{2l}.$$

50. La réduction de la forme φ étant actuellement terminée, achevons celle de $[\mathrm{C}]$.

Soit en premier lieu $i = 0$. Nous pourrons, par les mêmes procédés qu'au nº **41**, faire disparaître de φ : 1º les carrés des variables x^α_ρ où $\alpha \leqq 2l$, $\rho < n$; 2º les produits $x^\alpha_0 x^\beta_\rho$ où $\alpha \leqq 2l$, $\beta > \alpha$, $\rho < 2n-1$. Par là $[\mathrm{C}]$ sera réduit à la forme

$$[\mathrm{C}] = \sum f_{2k-1,2k,2n-1} + \Psi$$

et l'on aura entre le nombre $O^0(2n-1, 2l; m', n'; \ldots)$ des formes $[C]$ réductibles à ce type et le nombre $O(m', n'; \ldots)$ des formes Ψ la relation

$$O^0(2n-1, 2l; m', n'; \ldots) = \mathfrak{S}_{2l}^2\, 2^{l(2\mu-1)(n-2l+1)}\, O(m', l'; \ldots).$$

51. Soit $i = 2$. Les termes de $[C]$ dont le rang égale ou surpasse $m = 2n-1$ seront les suivants

$$\begin{aligned} & x'_n x'_n + x'_{n-1} x'_n + x'_{n-2} x'_{n+1} + \ldots + x'_{2n-1} x'_0 \\ & + x''_n x''_n + x''_{n-1} x''_n + x''_{n-2} x''_{n+1} + \ldots + x''_{2n-1} x''_0 \\ & + \sum_2^l \left(x_0^{2k-1} x_{2n-1}^{2k} + x_1^{2k-1} x_{2n-2}^{2k} + \ldots + x_{2n-1}^{2k-1} x_0^{2k} \right). \end{aligned}$$

Si $[C]$ contient un terme en x''^2_{n-1}, on pourra le faire disparaître par une substitution de la forme

$$| x'_{2n-1}, \ldots, x'_n, \ldots \quad x'_{2n-1} + c x''_{2n-2}, \ldots, x'_n + c x''_{n-1}, \ldots |.$$

On détruira de même, par les procédés du nº **42**, tous les termes de la forme $x_0^\alpha x_\rho^\beta$, où $\alpha \leqq 2l$, $\beta > \alpha$ et $\rho < 2n-1$ et aussi les termes quadratiques $x_\rho^\alpha x_\rho^\alpha$, où $\alpha \leqq 2l$ et $\rho < n$, à l'exception toutefois du terme en x'^2_{n-1}. Car, par suite de la présence dans $[C]$ du terme x'^2_n, la substitution

$$| x'_n, x'_{n-1}, \ldots \quad x'_n + x'_{n-1}, x'_{n-1} + x'_{n-2}, \ldots |$$

n'altère pas le coefficient de ce terme, et les autres substitutions qui pourraient le détruire feraient reparaître quelqu'un des autres termes que nous voulons supprimer.

Suivant qu'à la fin de nos opérations le terme x'^2_{n-1} sera absent ou non de la fonction $[C]$, elle aura la forme réduite

$$[C] = G_{1n} + G_{2n} + \sum_2^l f_{2k-1, 2k, 2n-1} + \Psi$$

ou

$$[C] = (G_{1n} + G_{1,n-1}) + G_{2n} + \sum_{2}^{l} f_{2k-1,2k,2n-1} + \Psi,$$

Ψ ne contenant plus les variables des $2l$ premières séries.

Le nombre $O^2(2n-1, 2l; m', l'; \ldots)$ des formes $[C]$ réductibles à chacun des deux types ci-dessus sera évidemment donné par la formule

$$O^2(2n-1, 2l; m', n'; \ldots) = \varepsilon^2_{2n-1,2l}\, 2^{l(2\mu-4ln-2l+1)-1}\, O(m', n'; \ldots).$$

52. Soit enfin $i = 1$. On pourra toujours, comme au n° **41**, faire disparaître successivement de $[C]$: 1° les termes en $x_0^\alpha x_\rho^\beta$ où $\alpha \gtreqless 2l+1$, $\beta > \alpha$, $\rho < 2n-1$; 2° et les termes quadratiques $x_\rho^\alpha x_\rho^\alpha$ où $\alpha \gtreqless 2l+1$, $\rho < n$, à l'exception toutefois du terme en $x_{n-1}'^2$ dont on ne peut disposer. Suivant que ce terme existera ou non à la fin de la réduction, $[C]$ sera ramené à la forme

$$G_{1n} + G_{1,n-1} + \sum_{1}^{l} f_{2k,2k+1,2n-1} + \Psi$$

ou à celle-ci

$$G_{1n} + \sum_{1}^{l} f_{2k,2k+1,2n-1} + \Psi,$$

Ψ ne contenant plus les variables des $2l+1$ premières séries.

Le nombre des termes à coefficients arbitraires que l'on a fait évanouir étant ici égal à

$$\begin{aligned}(2l+1)\,|\mu - 2n(2l+1)| + (2n-1)\frac{(2l+1)2l}{2} + (2l+1)n - 1 \\ = (2l+1)(\mu - 2ln - n - l) - 1,\end{aligned}$$

on aura pour le nombre $O^1(2n-1, 2l+1; m', l'; \ldots)$ des formes $[C]$ réductibles à chacun de ces types la formule

$$O^1(2n-1, 2l+1; m', l'; \ldots) = \varepsilon^1_{2n-1,2l+1}\, 2^{(2l+1)(\mu-2ln-n-l)-1}\, O(m', n'; \ldots).$$

33. En appliquant à la forme Ψ les mêmes procédés de réduction qui ont servi pour [C], nous arriverons finalement aux résultats suivants :

Le nombre p étant supposé égal à 2 et la classe C sa propre associée, groupons dans une même sous-classe celles de ses séries qui contiennent le même nombre de variables.

1° Il ne peut exister de fonction invariante que si le nombre des variables est pair dans chaque sous-classe.

2° Toute fonction invariante [C] peut être ramenée à une somme de fonctions partielles ne contenant chacune que les variables d'une seule sous-classe.

Soient $(x'_0, \ldots, x'_m), \ldots, (x^l_0, \ldots, x^l_m)$ les variables d'une sous-classe, formée de l séries, de $m+1$ variables chacune, et désignons par $f_{\alpha\beta m}$, $G_{\alpha r}$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta m} = {} & x_0^\alpha x_m^\beta + x_1^\alpha x_{m-1}^\beta + (x_2^\alpha + x_1^\alpha) x_{m-2}^\beta + \ldots \\ & + \left[x_{k+1}^\alpha + k x_k^\alpha + \frac{k(k-1)}{2} x_{k-1}^\alpha + \ldots + x_1^\alpha \right] x_{m-k-1}^\beta + \ldots, \\ G_{\alpha r} = {} & x_r^\alpha x_r^\alpha + x_{r-1}^\alpha x_r^\alpha + x_{r-2}^\alpha (x_{r+1}^\alpha + x_r^\alpha) + \ldots \\ & + x_{r-k-1}^\alpha (x_{r+k}^\alpha + k x_{r+k-1}^\alpha + \ldots + x_r^\alpha) + \ldots. \end{aligned}$$

La forme canonique partielle correspondant à cette sous-classe aura l'une des expressions suivantes :

1° Si $m = 2n$ (d'où l pair),

$$f_{12m} + f_{34m} + \ldots + f_{l-1,l,m}$$

ou

$$(f_{12,m} + G_{1n} + G_{2n}) + f_{34m} + \ldots + f_{l-1,l,m};$$

2° Si $m = 2n-1$ et l impair,

$$G_{1n} + f_{23m} + f_{45m} + \ldots + f_{l-1,l,m}$$

ou

$$(G_{1n} + G_{1,n-1}) + f_{23m} + \ldots + f_{l-1,l,m};$$

3° Si $m = 2n-1$ et l pair,

$$f_{12m} + f_{34m} + \ldots + f_{l-1,l,m}$$

ou

$$G_{1n} + G_{2n} + f_{34m} + \ldots + f_{l-1,l,m}$$

ou enfin

$$G_{1n} + G_{1,n-1} + G_{2n} + f_{34m} + \ldots + f_{l-1,l,m}.$$

Si donc on désigne par k le nombre total des sous-classes, par k' celui des sous-classes où le nombre des séries ainsi que celui des variables de chaque série sont tous les deux pairs, le nombre des types canoniques distincts sera $2^{k-k'}3^{k'}$.

54. Le caractère quadratique de chacun de ces types canoniques est aisé à déterminer. Il est, en effet, le produit des caractères des formes partielles des espèces

$$f_{\alpha\beta m}, \quad f_{\alpha\beta,2n} + G_{\alpha n} + G_{\beta n}, \quad G_{\alpha n}, \quad G_{\alpha n} + G_{\alpha,n-1}$$

qui y figurent.

Or, la forme $f_{\alpha\beta m}$ étant bilinéaire par rapport à deux systèmes de $m+1$ variables est équivalente à une somme de $m+1$ rectangles. Son caractère est donc $+1$.

La forme $G_{\alpha n}$ peut également se transformer par le changement de variables suivant

$$\begin{gathered} x^\alpha_{n-1} + x^\alpha_n = X^\alpha_n, \\ x^\alpha_{n+1} + x^\alpha_n = X^\alpha_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^\alpha_{n+k} + k x^\alpha_{n+k-1} + \ldots = X^\alpha_{n-k-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

en une somme de rectangles

$$x^\alpha_n X^\alpha_n + x^\alpha_{n-2} X^\alpha_{n-2} + \ldots + x^\alpha_0 X^\alpha_0,$$

son caractère sera donc $+1$.

La forme $G_{\alpha n} + G_{\alpha,n-1}$ se transforme de même en posant

$$\begin{gathered} x^\alpha_{n+1} + x^\alpha_n + x^\alpha_{n-1} = X^\alpha_{n-2}, \\ (x^\alpha_{n+2} + 2x^\alpha_{n+1} + x^\alpha_n) + (x^\alpha_n + x^\alpha_{n-1}) = X^\alpha_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

en la suivante

$$x_n^\alpha x_n^\alpha + x_{n-1}^\alpha x_{n-1}^\alpha + x_{n-1}^\alpha x_n^\alpha + x_{n-2}^\alpha X_{n-2}^\alpha + \ldots + x_0^\alpha X_0^\alpha,$$

formée de deux carrés et d'une somme de rectangles. Son caractère est donc -1.

Enfin, dans la forme

$$f_{\alpha\beta.2n} + G_{\alpha n} + G_{\beta n},$$

les multiplicateurs des variables x_0^α, x_1^α, ..., x_{n-1}^α; x_0^β, ..., x_{n-1}^β sont des fonctions linéairement distinctes par rapport aux variables x_{2n}^β, x_{2n-1}^β, ..., x_{n+1}^β; x_{2n}^α, ..., x_{n+1}^α. En les prenant comme variables indépendantes à la place de ces dernières et les désignant par X_0^α, ..., X_{n-1}^α; X_0^β, ..., X_{n-1}^β la forme deviendra

$$x_n^\alpha x_n^\alpha + x_n^\beta x_n^\beta + x_n^\alpha x_n^\beta + \sum_1^{n-1} [x_k^\alpha X_k^\alpha + x_k^\beta X_k^\beta].$$

Elle a pour caractère -1.

IV.

35. Soit enfin S une substitution linéaire qui laisse invariante une forme quadratique Φ; proposons-nous de déterminer si elle est paire ou impaire dans le groupe G correspondant à cette forme.

1° Si l'ordre q de la substitution S est impair, S sera paire, car elle est le carré de la substitution $S^{\frac{q+1}{2}}$, laquelle appartient à G.

2° Si Φ est de la forme $\sum x_k y_k$ et que S soit le produit de deux substitutions partielles S_x, S'_y opérées respectivement sur les x et sur les y, S sera paire. Car en combinant les substitutions fondamentales paires M_{ik} (n° **10**) on peut obtenir une substitution Σ qui opère sur les x la substitution S_x. La substitution $S\Sigma^{-1}$ laissera ces variables inaltérées; comme elle laisse Φ invariante, elle ne pourra altérer les y; donc elle se réduit à l'unité. Donc $S = \Sigma$, substitution paire.

36. Lemme. — *Si Φ est une somme de fonctions partielles Φ_1, Φ_2, ... contenant des variables différentes, et si G_1 est le groupe*

des substitutions qui, opérées entre les variables de Φ_1, *la laissent invariable, toute substitution de* G_1 *appartiendra évidemment au groupe* G; *de plus elle aura dans ce groupe la même parité que dans le groupe* G_1.

Ramenons, en effet, par un changement de variables, chacune des deux formes Φ_1 et $\Psi = \Phi - \Phi_1$ à son expression normale. Si l'une au moins des deux est du premier type (réductible à une somme de rectangles), Φ sera elle-même ramenée à la forme normale, et les substitutions fondamentales d'où dérivent toutes celles de G_1 feront encore partie du système des substitutions fondamentales de G, de sorte que la proposition est évidente.

Mais si Φ_1 et Ψ sont toutes deux du second type, soit, par exemple,

$$\Phi_1 = \xi^2 + \eta^2 + \xi\eta \quad + \sum x'_i y'_i,$$

$$\Psi = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_1\eta_1 + \sum x''_k y''_k,$$

il faudra, pour ramener Φ à sa forme normale, opérer une nouvelle transformation, par exemple la suivante :

$$x_1 = \xi + \eta_1, \qquad x_2 = \xi + \eta + \xi_1 + \eta_1,$$
$$y_1 = \eta + \eta_1, \qquad y_2 = \xi + \eta + \xi_1;$$

Φ sera transformé en

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \sum x'_i y'_i + \sum x''_k y''_k.$$

Cela posé, G_1 est dérivé (10) des substitutions fondamentales

$$\begin{aligned}
L_i &= |x'_i, y'_i \quad y'_i, x'_i|,\\
M_{ik} &= |x'_i, y'_k \quad x'_i + x'_k, y'_k + y'_i|,\\
L_0 &= |\xi, \eta \quad \eta, \xi|,\\
N &= |\xi, \eta \quad \eta, \xi + \eta|,\\
P &= |\xi, \eta, y'_1 \quad \xi + \eta + x'_1, \xi, \xi + x'_1 + y'_1|;
\end{aligned}$$

les substitutions L_0, L_i étant impaires et les substitutions M_{ik}, N, P paires dans le groupe G_1. Elles conserveront ce même caractère dans le groupe G; car, en les rapportant aux nouvelles variables, L_0 prendra la forme

$$L_0 = | x_1, y_1 \quad y_1, x_1 |$$

et sera une substitution fondamentale impaire du groupe G; L_i, M_{ik} ne changent pas d'expression et sont, la première impaire, la seconde paire dans le groupe G. Enfin les substitutions N, P étant d'ordre impair (on vérifie immédiatement que $N^3 = P^3 = 1$) sont nécessairement paires.

Notre proposition étant établie pour les substitutions fondamentales de G_1, le sera pour toutes celles qui en dérivent.

57. Théorème. — *Pour que la substitution* S *soit paire, il faut et il suffit que les variables y forment un nombre pair de séries.*

Soient $2n$ le nombre des variables entre lesquelles la substitution S est opérée, l le nombre des séries qu'elles forment. Nous pouvons supposer la proposition établie pour les nombres $2n'$, l', si $n' < n$ ou $n' = n$, mais $l' > l$.

Soit

$$S = \left| \begin{array}{ll} x'_0, x'_1, \ldots & a x'_0, a(x'_1 + x'_0), \ldots \\ x''_0, x''_1, \ldots & b x''_0, b(x''_1 + x''_0), \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots & \ldots, \ldots\ldots\ldots, \ldots \end{array} \right|.$$

Cette substitution est le produit de la substitution

$$S_1 = \left| \begin{array}{ll} x'_0, x'_1, \ldots & a x'_0, a x'_1, \ldots \\ x''_0, x''_1, \ldots & b x''_0, b x''_1, \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots & \ldots, \ldots, \ldots \end{array} \right|,$$

d'ordre impair, par la substitution

$$S_2 = \left| \begin{array}{ll} x'_0, x'_1, \ldots & x'_0, x'_1 + x'_0, \ldots \\ x''_0, x''_1, \ldots & x''_0, x''_1 + x''_0, \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots & \ldots, \ldots\ldots, \ldots \end{array} \right|,$$

dont l'ordre est une puissance de 2. Chacune d'elles sera donc une puissance de S et appartiendra à G; la substitution S′ étant paire, S aura la même parité que S″; d'ailleurs, le nombre des séries y est le même. Il suffira donc d'établir le théorème pour S″.

La démonstration est donc ramenée au cas où toutes les séries ont l'unité pour multiplicateur.

58. Toute forme invariante Φ est, d'ailleurs, réductible, ainsi que nous l'avons vu, à une somme de formes partielles $\Phi' + \Phi'' + \ldots$ contenant chacune les variables d'une seule série, ou de deux séries au plus. La substitution S est, de son côté, le produit de substitutions partielles S′, S″, ..., opérées respectivement entre les variables de Φ′, de Φ″, ..., et dont chacune laisse Φ invariante.

Le théorème étant établi par hypothèse pour S′ et Φ′, S″ et Φ″, le sera, en vertu du lemme précédent, pour S′ et Φ, pour S″ et Φ, ... et, par suite, pour $S = S'S'' \ldots$ et Φ.

Il ne reste donc à démontrer le théorème que dans le cas où S contient une série ou deux au plus.

59. Supposons d'abord qu'il y ait deux séries, de $m+1$ variables chacune, et soit

$$S = \begin{vmatrix} x'_0, x'_1, \ldots & x'_0, x'_1 + x'_0, \ldots \\ x''_0, x''_1, \ldots & x''_0, x''_1 + x''_0, \ldots \end{vmatrix}.$$

Si Φ n'est pas réductible à une somme de deux fonctions partielles $\Phi' + \Phi''$ contenant chacune les variables d'une seule série, elle le sera à l'une des deux expressions suivantes :

$$f_{12m}$$

ou (si m est un nombre pair $2n$)

$$f_{12,2n} + G_{1n} + G_{2n}.$$

1° Dans le premier cas, f_{12m} étant bilinéaire par rapport aux x' et aux x'', une transformation opérée sur ces dernières variables la ramè-

nera à une somme de rectangles

$$x'_0 X''_0 + \ldots + x'_m X''_m,$$

et S étant le produit de deux substitutions partielles effectuées respectivement sur les x' et sur les X'' sera paire. Le théorème est donc vérifié.

2° Soient, en second lieu,

$$m = 2n$$

et

$$\begin{aligned}
\Phi &= f_{12,2n} + G_{1n} + G_{2n} \\
&= x'_0 x''_{2n} + x'_1 x''_{2n-1} + (x'_2 + x'_1) x''_{2n-2} + \ldots \\
&\quad + x'_n x'_n + \ldots + x'_0 (x'_{2n-1} + C^1_{n-1} x'_{2n-2} + C^2_{n-1} x'_{2n-3} + \ldots + x'_n) \\
&\quad + x''_n x''_n + \ldots \\
&= x'_0 [x''_{2n} + x'_{2n-1} + C^1_{n-1} x'_{2n-2} + \ldots + x'_n] + \Psi,
\end{aligned}$$

Ψ ne contenant plus les variables x'_0, x''_{2n}.

Changeons x''_{2n} en $x''_{2n} + x'_0$; l'expression de S ne sera pas altérée par cette transformation, et Φ deviendra

$$x'_0 [x'_0 + x''_{2n} + x'_{2n-1} + C^1_{n-1} x'_{2n-2} + \ldots + x'_n] + \Psi,$$

$$x'_0 X''_0 + \Psi,$$

en posant, pour abréger,

$$X''_0 = x'_0 + x'_{2n} + x'_{2n-1} + C^1_{n-1} x'_{2n-2} + \ldots + x'_n.$$

La substitution T qui remplace x'_0 par X''_0 sans altérer les autres variables x, n'altère pas Ψ et permute évidemment les deux fonctions x'_0, X''_0. C'est donc une des substitutions qui laissent Φ invariante; elle est, d'ailleurs, impaire; car, si l'on prenait pour variable nouvelle X''_0 au lieu de x''_{2n}, elle serait la substitution fondamentale impaire qui laisse invariante la fonction partielle $x'_0 X''_0$.

Cela posé, pour vérifier le théorème, il nous faut établir que la substitution S (où le nombre des séries est 2) est paire ou, ce qui revient au même, que la substitution ST est impaire.

Or cette dernière substitution remplace

$$\begin{array}{llll} x'_{2n}, \ldots, x'_1 & \text{par} & x'_{2n}+x'_{2n-1}, \ldots, & x'_1+x'_0; \\ x''_{2n}, \ldots, x''_0 & \text{par} & x''_{2n}+x''_{2n-1}, \ldots, & x''_0, \end{array}$$

et enfin x'_0 par

$$\begin{aligned} & x'_0+(x''_{2n}+x''_{2n-1})+(x'_{2n-1}+x'_{2n-2}) \\ & \quad + C^1_{n-1}(x'_{2n-2}+x'_{2n-3})+\ldots+(x'_n+x'_{n-1}) \\ & = x'_{2n-1}+C^1_n x'_{2n-2}+\ldots+x'_{n-1}+x'_0+x''_{2n}+x''_{2n-1}. \end{aligned}$$

Son déterminant caractéristique Δ est évidemment égal à $(1-\rho)^{2n+2}\delta$, δ désignant celui de la substitution partielle

$$\left| \begin{array}{ll} x'_{2n-1}, \ldots, x'_1 & x'_{2n-1}+x'_{2n-2}, \ldots, x'_1+x'_0 \\ x'_0 & x'_{2n-1}+C^1_n x'_{2n-2}+\ldots+x'_{n-1}+x'_0 \end{array} \right|.$$

Or on a

$$\delta = \left| \begin{array}{ccccccccc} 1-\rho & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\rho & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\rho & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1-\rho & 1 \\ 1 & C^1_n & C^2_n & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1-\rho \end{array} \right|$$

et, en développant suivant les coefficients de la dernière ligne,

$$\begin{aligned} \delta &= 1+C^1_n(1-\rho)+C^2_n(1-\rho)^2+\ldots+(1-\rho)^n+(1-\rho)^{2n} \\ &= (1+1-\rho)^n+(1-\rho)^{2n} = \rho^n+(1-\rho)^{2n}. \end{aligned}$$

Soit $n=2^\lambda q$, q étant impair, on aura

$$\Delta = [\rho^q+(1-\rho)^{2q}]^{2^\lambda}(1-\rho)^{2n+2}.$$

Les racines distinctes de δ seront au nombre de $2q+1$, car le poly-

nome $\rho^q + (1-\rho)^{2q}$ n'ayant pas de racine commune avec sa dérivée, qui se réduit à $q\rho^{q-1}$ (mod 2), a $2q$ racines distinctes.

A chacune de ces $2q+1$ racines de la congruence caractéristique correspond d'ailleurs une seule série dans l'expression canonique de ST, car les premiers mineurs de Δ n'ont pas de diviseur commun. L'un d'eux est, en effet, égal à $(1-\rho)^{2n+2}$ et un autre est égal à δ. Or δ n'admet pas la racine $\rho = 1$. Donc ST, sous sa forme canonique, aura un nombre impair $2q+1$ de séries et sera impaire.

60. Supposons enfin que les variables de S ne forment qu'une série. Elles seront en nombre pair $2n$, et l'on aura, soit

$$\Phi = G_{1,n},$$

soit

$$\Phi = G_{1,n} + G_{1,n-1}.$$

Supposons d'abord $n > 1$. En changeant x'_{2n-1} en $x'_{2n-1} + x'_0$, on n'altérera pas l'expression de S, et Φ sera accru du terme x'^2_0.

On aura alors

$$\Phi = x'_0(x'_0 + \varphi) + \Psi,$$

Ψ ne contenant plus les variables x'_0, x'_{2n-1}, et φ étant égal, dans le premier cas, à

$$x'_{2n-1} + C^1_{n-1} x'_{2n-2} + \ldots + x'_n$$

et, dans le second, à

$$\begin{aligned} &x'_{2n-1} + C^1_{n-1} x'_{2n-2} + \ldots + x'_n \\ &+ x'_{2n-3} + C^1_{n-2} x'_{2n-4} + \ldots + x'_{n-1}. \end{aligned}$$

La substitution T, qui remplace x'_0 par $x'_0 + \varphi$ sans altérer les autres variables x', remplacera réciproquement $x'_0 + \varphi$ par x'_0; elle laissera donc Φ invariante et sera impaire.

Il nous faut démontrer que S est impaire ou, ce qui revient au même, que ST est paire.

Or, cette substitution remplace

$$x'_{2n-1}, \quad \ldots, \quad x'_1 \qquad \text{par} \qquad x'_{2n-1} + x'_{2n-2}, \quad \ldots, \quad x'_1 + x'_0$$

et, quant à x'_0, elle le remplace dans le premier cas par

$$\begin{aligned} & x'_0 + (x'_{2n-1} + x'_{2n-2}) + C^1_{n-1}(x'_{2n-2} + x'_{2n-3}) + \dots \\ & = x'_0 + x'_{2n-1} + C^1_n x'_{2n-2} + \dots + x'_{n-1}. \end{aligned}$$

Dans le second cas, on devra ajouter à cette expression les termes

$$(x'_{2n-3} + x'_{2n-4}) + C^1_{n-2}(x'_{2n-4} + x'_{2n-5}) + \dots = x'_{2n-3} + C^1_{n-1} x'_{2n-4} + \dots .$$

Formons le déterminant caractéristique de ST. Il sera, dans le premier cas, identique au déterminant δ du numéro précédent. Il aura $2q$ racines distinctes et à chacune d'elles correspond une seule série dans la forme canonique de ST; car les mineurs de δ n'ont pas de diviseur commun, l'un d'eux étant égal à l'unité. Le nombre des séries dans ST est donc pair et cette substitution sera paire.

Dans le second cas, formons de même le déterminant δ caractéristique de ST et développons-le suivant les éléments de la dernière ligne. On trouvera

$$\begin{aligned} \delta & = \rho^n + (1-\rho)^{2n} + (1-\rho)^2[1 + C^1_{n-1}(1-\rho) + C^2_{n-1}(1-\rho)^2 + \dots] \\ & = \rho^n + (1-\rho)^{2n} + (1-\rho)^2 \rho^{n-1}. \end{aligned}$$

La congruence $\delta \equiv 0$ a ses $2n$ racines toutes distinctes, car δ n'a aucune racine commune avec sa dérivée, celle-ci se réduisant à

$$(1-\rho)^2 \rho^{n-2} \pmod 2, \quad \text{si } n \text{ est pair};$$
$$\rho^{n-1} \pmod 2, \quad \text{si } n \text{ est impair}.$$

Donc le nombre des séries dans ST est pair, et cette substitution sera paire.

Soit enfin $n = 1$, on aura

$$S = | x_0, x_1 \quad x_0, x_1 + x_0 |$$

et

$$\Phi = G_1 = x_1^2 + x_0 x_1 = x_1(x_1 + x_0)$$

ou

$$\Phi = G_1 + G_0 = x_1^2 + x_0 x_1 + x_0^2.$$

Dans le premier cas, posons $x_1 + x_0 = y_1$; il viendra

$$\Phi = x_1 y_1, \qquad S = | x_1, y_1 \quad y_1, x_1 |,$$

S sera une substitution fondamentale impaire.

Dans le second cas, S sera le produit des deux substitutions fondamentales :

$$L = | x_0, x_1 \quad x_1, x_0 |, \qquad N = | x_0, x_1 \quad x_1, x_1 + x_0 |$$

dont la première est impaire et la seconde paire. Donc ici encore S est impaire.

Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluides;

Par M. J. BOUSSINESQ.

Sommaire : § I. Objet et résultats de ce travail; vérifications expérimentales. — § II. Échauffement permanent d'un courant fluide, par un cylindre indéfini dont l'axe lui est normal et qui s'y trouve immergé. — § III. Pouvoir refroidissant du courant sur le cylindre : applications à un plateau mince, au cylindre circulaire, aux cylindres elliptiques, à une armille. — § IV. Échauffement, par un corps de révolution, d'un courant fluide l'enveloppant et dirigé suivant son axe. — § V. Pouvoir refroidissant du courant fluide sur le corps de révolution; applications à la sphère, à l'ellipsoïde, au plateau circulaire, à une aiguille. — § VI. Extension des lois précédentes à tout corps convexe. — § VII. Cas de l'ellipsoïde à axes inégaux; application à un disque et à une aiguille elliptiques.

§ I. — Objet et résultats de ce travail; vérifications expérimentales.

1. L'équation aux dérivées partielles régissant la propagation de la chaleur dans les fluides a été découverte par Fourier en 1820 et réduite, quelques années après, par Ostrogradsky et Poisson, à sa forme la plus simple, presque identique à celle de l'équation usuelle que Fourier avait donnée bien antérieurement pour les solides isotropes : elle exprime, en effet, que la dérivée θ', par rapport au temps t, de la température θ d'une même particule fluide *suivie dans son mouvement*, est, à chaque instant, proportionnelle au paramètre différentiel $\Delta_2\theta$, dérivée naturelle, *dans l'espace*, de la température actuelle θ, ou mesure de sa rapidité *moyenne* d'accroissement autour de la parti-

cule[1]. Il n'aurait pas été possible d'imaginer une loi plus simple; et, cependant, son adjonction aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, incomplètes sans cela, paraissait rendre tout à fait inabordable le problème des mouvements d'un fluide. Aussi, trois quarts de siècle se sont écoulés depuis, sans qu'on en eût, du moins à ma connaissance, tiré aucun parti, avant mon étude de 1901, publiée dans le Tome II des leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière* (p. 172 à 196). Jusque-là, géomètres et physiciens s'étaient contentés, dans les problèmes dynamiques, d'attribuer aux fluides une conductibilité ou infinie, c'est-à-dire suffisante pour maintenir leur masse à une température uniforme donnée, ou nulle, c'est-à-dire propre à empêcher tout échange de chaleur entre particules voisines.

Pour arriver à des résultats saisissables en dehors de ces deux hypothèses *d'isothermie* et *d'adiabatisme*, il m'a fallu admettre les deux suppositions, ordinairement réalisées à très peu près : 1° de la *permanence* de l'état physique en chaque point (x, y, z) et 2° de la conservation des volumes fluides *sauf dans les termes de pesanteur*, c'est-à-dire sans négliger les variations du *poids* de l'unité de volume ou la force *ascensionnelle* due à l'échauffement. Même ainsi simplifiées, les équations des *courants de convection produits autour d'un corps chaud par ses excès de température* restent, il est vrai, inintégrables. Car dans le cas le moins complexe (celui d'un mince plateau vertical), où, grâce à un commencement d'intégration, le problème se ramène au calcul d'une seule fonction inconnue, l'équation aux dérivées partielles dont dépend celle-ci est du quatrième ordre et non linéaire. Seulement, pour toute forme du corps, ces équations offrent un genre d'homogénéité, ou acceptent des transformations *homothétiques* (pour ainsi dire), qui expliquent les lois monomes, si bien vérifiées, de Dulong et Petit, sur le refroidissement des corps au sein d'une atmosphère en repos.

---

(1) On peut voir, au sujet de cette signification géométrique du paramètre différentiel Δ_2 des fonctions de point, les n°s 59* et 60* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. I, *Compléments*, p. 70*).

2. Mais il existe un problème plus simple, sur des courants qui sont encore *de convection*, c'est-à-dire véhicules de chaleur. C'est le problème du *refroidissement d'un solide fixe, au sein d'une masse fluide indéfinie animée, dans son ensemble, d'une vitesse uniforme et donnée* V. Alors, pourvu que la translation générale V ne soit pas extrêmement lente, les filets fluides localement déviés par le corps, et qui sillonnent sa surface, se chauffent à son contact et transmettent de la chaleur à leurs voisins, *sans modification appréciable ni des trajectoires, ni des vitesses d'écoulement, par les variations modérées* θ *de température*. L'Hydrodynamique *ordinaire* permet donc de déterminer *à part* le mouvement visible, du moins pour les formes du corps qui se prêtent au calcul effectif des vitesses des filets ([1]). Et il ne reste ainsi à intégrer que l'équation indéfinie en θ, *dès lors linéaire* ou du type de celles que les géomètres savent aborder.

Cette équation aux dérivées partielles a même ses coefficients constants quand le corps ne trouble pas le courant dans une proportion sensible, notamment quand il se réduit à un mince plateau, parallèle aux filets fluides. L'étude de 1901 citée ci-dessus montre comment elle s'intègre alors, dans l'hypothèse, presque toujours réalisée, d'une conductibilité assez petite pour réduire la masse chauffée à une couche peu épaisse, et en admettant d'ailleurs une lenteur de refroidissement suffisante pour que la distribution des températures, dans le fluide, soit sensiblement, à chaque instant, celle qui subsisterait d'une manière permanente, si l'on maintenait indéfiniment les températures actuelles de la surface du solide.

Le présent Mémoire fait voir d'abord que la même analyse s'étend aux courants heurtant, perpendiculairement à l'axe, et enveloppant tout cylindre de longueur indéfinie, dont chaque génératrice est maintenue à une température θ_0 uniforme en ses divers points. Il suffit, pour le reconnaître, d'introduire comme variables, dans les équations,

---

([1]) Dans ce calcul, je ferai abstraction des inévitables tourbillonnements qui, lors des vitesses d'écoulement notables, ne manquent jamais de se produire à l'aval du corps, et d'y donner lieu à des frottements spéciaux : j'admettrai donc l'hypothèse de la fluidité parfaite, bien suffisante ici quand les écoulements ne seront pas très rapides.

deux coordonnées curvilignes orthogonales α, β, paramètres (à Δ_1 égal et à Δ_2 nul) qui définissent, dans le plan normal aux génératrices, l'un, α, la famille des filets fluides, l'autre, β, les lignes d'égal potentiel. Le choix de ces variables rend, en effet, tant l'équation indéfinie en θ que les deux conditions relatives, respectivement, à la surface du corps et aux points infiniment éloignés, identiques à ce qu'elles sont pour le cas du plateau mince, où α et β se réduisent aux deux coordonnées rectilignes x et y. Depuis longtemps, les géomètres connaissaient une particularité analogue dans le problème des températures stationnaires des cylindres *solides* (1) : on voit qu'elle subsiste, sans changement, dans une masse fluide en état de mouvement permanent, composée de couches cylindriques dont chaque génératrice a une vitesse commune, perpendiculaire à sa direction et dérivée, sous la résistance d'un cylindre solide immergé entre ces couches, d'une translation uniforme V de toute la masse.

Quand le corps, au lieu d'être cylindrique, est de révolution autour d'un axe dirigé suivant le courant, avec température θ_0 pareille tout le long de chaque *cercle parallèle,* deux coordonnées curvilignes analogues α, β, caractérisant, dans le plan d'un méridien quelconque, l'une, les filets fluides, l'autre, les lignes d'égal potentiel, donnent encore aux équations du problème leur forme la plus simple, sans la rendre, toutefois, entièrement indépendante de la figure du méridien; et, grâce à un changement ultérieur du paramètre β, elles permettent, toujours en admettant que le fluide soit peu conducteur, de représenter par l'intégrale utilisée déjà dans le cas précédent les températures θ de la couche peu épaisse des filets chauffés. Enfin, l'adjonction d'une troisième coordonnée curviligne γ, propre à distinguer les uns des autres les filets fluides ruisselant sur le corps, permet d'étendre à une forme quelconque de celui-ci la même intégrale, encore dans l'hypothèse d'une faible épaisseur de la couche chauffée.

5. Le résultat pratique intéressant de cette analyse est le calcul de la quantité totale de chaleur enlevée au corps par le courant fluide

(1) *Voir,* par exemple, les nos 448* et 449* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments,* p. 408* à 415*).

dans l'unité de temps, quantité dite le *Pouvoir refroidissant* du courant sur le corps. Supposant uniforme sur toute la surface, pour simplifier et pour fixer les idées, l'excès θ_0 de température par rapport à l'ensemble de la masse fluide, j'assimilerai l'action réfrigérante de celle-ci à l'influence qu'aurait une certaine *conductibilité extérieure* moyenne k du corps, telle que son produit par l'excès donné θ_0 de température et par la surface totale du corps égalât précisément cette quantité de chaleur. La conductibilité extérieure *fictive* k ainsi définie, caractéristique la plus naturelle, ce semble, du pouvoir refroidissant à évaluer, se trouve être indépendante de l'excès θ_0 de température, ainsi que de la nature soit géométrique, soit physique de la surface, mais proportionnelle tout à la fois, pour chaque forme de celle-ci, aux racines carrées de la conductibilité intérieure K du courant, de sa capacité calorifique C par unité de volume, de sa vitesse générale V, enfin, de l'inverse du parcours moyen L des filets fluides sur le corps.

Le coefficient de cette multiple proportionnalité peut se calculer pour un certain nombre de formes du corps et d'orientations de celui-ci dans le courant. Il est, par exemple, $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284$ pour un plateau mince parallèle au courant, $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1,2732$ pour un cylindre circulaire indéfini, ayant son axe perpendiculaire au courant, $\sqrt{2} = 1,4142$ pour la sphère, $\frac{8}{\pi\sqrt{3}} = 1,4702$ et $\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} = 1,1731$ pour un disque et une aiguille, de révolution, à axes dirigés dans le sens du courant, etc. On voit qu'il grandit, à égalité de parcours des filets fluides sur le corps, avec la *convexité* de sa forme, sur le trajet de ces filets, soit dans leur propre sens, soit même dans le sens perpendiculaire, et qu'il ne doit s'écarter, par excès ou par défaut, de la valeur moyenne 1,3 environ, au plus ou guère plus que du huitième de cette valeur, dans des cas extrêmement variés.

4. Cette théorie, quoique supposant atteint un état permanent, même calorifique, du courant fluide, s'appliquerait évidemment, comme il a été dit ci-dessus, au refroidissement, par le courant, d'un corps dont on ne renouvellerait pas la provision de chaleur, pourvu que ce refroidissement fût assez lent, savoir, beaucoup plus que ne le

serait lui-même, pour l'excès actuel θ_0 de température *supposé maintenu*, l'établissement très approché de l'état permanent admis. Or, dans ces limites, elle semble comporter des vérifications assez simples.

Si, par exemple, on fait refroidir dans un même courant *athermane*, en les plaçant assez loin l'un de l'autre pour ne pas s'influencer mutuellement quant à leurs températures, un long cylindre, normal au courant, et une sphère, de même nature et de même rayon R, pris, tous les deux, à une température actuelle commune, leurs pertes respectives de chaleur par unités de temps et d'aire devront être, actuellement, entre elles comme $\frac{4}{\pi}$ est à $\sqrt{2}$, d'après ce qui précède. Or, leurs volumes par unité d'aire sont $\frac{R}{2}$, pour le cylindre, et $\frac{R}{3}$, pour la sphère, c'est-à-dire entre eux, comme 3 est à 2. Les abaissements élémentaires respectifs de température qui en résulteront seront donc proportionnels aux deux quotients de $\frac{4}{\pi}$ par 3 et de $\sqrt{2}$ par 2, ou à $\frac{4}{3\pi}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi la vitesse initiale de refroidissement de la sphère doit égaler celle du cylindre *multipliée par* $\frac{3\pi}{4\sqrt{2}} = 1,6661$, soit, environ, par $\frac{5}{3}$, résultat dont la constatation pourrait faire l'objet d'une expérience intéressante.

Quand le fluide n'est pas athermane, que c'est de l'air, par exemple, les solides immergés y émettent en outre, dans l'éther, conformément aux lois soit de Dulong et Petit, soit plutôt de Stéfan, des flux de chaleur rayonnante, dont l'intervention sur le refroidissement de ces corps, pour l'accélérer, n'est pas négligeable, sauf aux très basses températures absolues. D'où, alors, la nécessité d'une correction plus ou moins sensible, aux résultats précédents [1].

---

[1] On peut voir, à la page 189 du Tome II cité de mon Cours sur la *Théorie analytique de la chaleur*, etc., que, dès à présent, cette théorie du pouvoir refroidissant des courants fluides a été l'objet de vérifications expérimentales précises (contemporaines, mais indépendantes, de mes recherches) touchant la proportionnalité du pouvoir refroidissant aux excès de température du corps et à la racine carrée de la vitesse du courant.

J'ai appris, depuis, qu'il y en avait eu, sur les mêmes points, de bien antérieures (SER, *Traité de Physique industrielle*, t. I, 1888, p. 142 à 162). Quoique le cou-

§ II. — Échauffement permanent d'un courant fluide, par un cylindre indéfini dont l'axe lui est normal et qui s'y trouve immergé.

5. Lorsqu'un solide, maintenu immobile et à des températures θ_0 invariables sur toute sa surface, se trouve immergé dans un courant

---

rant, au lieu d'être latéralement indéfini, y fût toujours d'assez faible épaisseur et, le plus souvent, contenu dans un tube de quelques centimètres seulement de diamètre qui constituait le corps chaud, néanmoins ces deux lois de proportionnalité, du pouvoir refroidissant du courant à l'excès θ_0 de température du corps et à la racine carrée de la vitesse V, se vérifiaient toutes les fois que la distance moyenne du fluide à la paroi était comparable à la longueur du tube; en sorte qu'on pût admettre, *tout au moins pour le filet central ou axial, la conservation approchée de sa température primitive ou d'amont*, hypothèse essentielle de notre analyse.

En effet, un pareil tube, du moins quand il a son rayon beaucoup plus grand que l'épaisseur de la couche fluide intérieure chauffée notablement par son contact, est assimilable à notre plateau tangent au courant, et que celui-ci refroidirait sur une de ses faces, en lui conférant la conductibilité fictive $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{L}}$. Car rien n'est changé au calcul des températures du fluide si l'on courbe le plateau en cylindre, pourvu que les génératrices soient dans la direction du courant et que les rayons de courbure ne deviennent pas comparables, en petitesse, à l'épaisseur de la couche fluide chauffée. Il faut, toutefois, faire abstraction des inégalités de vitesse des filets fluides à l'intérieur, dues aux frottements et alors plus grandes que dans un courant indéfini.

Dans d'autres tubes, de calibres encore moindres, également expérimentés par Ser, la chaleur emportée était proportionnelle à une fonction de V plus rapidement croissante que $\sqrt{V}$, et susceptible même d'atteindre la première puissance V quand tous les filets fluides, jusqu'à l'axe, finissaient par acquérir, avant leur sortie, la température θ_0 du tube. Alors, en effet, tout le fluide emportait sa charge maxima de chaleur, proportionnelle à θ_0, et *le pouvoir refroidissant devenait proportionnel au débit*, c'est-à-dire à V.

Enfin, dans quelques observations de Ser, le courant, toujours peu épais mais relativement très large, circulait autour d'un gros et court tuyau (qui était le corps chaud), soit lisse, soit fortement *nervé*, ou entaillé de profondes cannelures longitudinales, par le fait desquelles sa surface se trouvait multipliée respectivement (à hauteur constante du cylindre) par 4 et par 6,6. Or ces accroissements relatifs de la surface ne multipliaient guère le pouvoir refroidissant que par leurs racines carrées environ. C'est bien, à peu près, ce qu'indiquent nos formules, supposé que le trajet L des filets fluides sur les cylindres à nervures ait grandi,

fluide permanent à zéro, de densité constante, latéralement indéfini et dont, loin du corps, la vitesse générale V a des cosinus directeurs donnés l, m, n, les filets fluides qui contournent ce corps prennent, à son contact, les températures θ_0 et les communiquent partiellement à leurs voisins, de proche en proche. Les températures θ du fluide, permanentes en chaque point (x, y, z) de l'espace, sont régies, en effet, par l'équation

$$C\theta' = K\Delta_2\theta,$$

où K est la conductibilité intérieure du fluide, C la chaleur spécifique de son unité de volume, enfin, θ' la dérivée de θ par rapport au temps, prise en suivant sur son filet la particule qui passe actuellement au point (x, y, z), c'est-à-dire en multipliant, par les vitesses u, v, w du fluide suivant les x, y, z, les trois dérivées de θ en x, y, z et faisant la somme.

D'ailleurs, ces vitesses u, v, w, censées être assez grandes pour ne pas se trouver sensiblement influencées par l'échauffement θ, sont les trois dérivées en x, y, z d'un potentiel $V\beta$, puisque les rotations moyennes de chaque particule, nulles assez loin en amont du corps où u, v, w ont les valeurs constantes Vl, Vm, Vn, restent nulles pour elle, et dès lors, partout, à raison du théorème classique de Lagrange-Cauchy. Vu, en outre, la conservation des volumes fluides, les deux équations en β et θ, respectivement, seront

$$(1) \qquad \Delta_2\beta = 0, \qquad \frac{d\beta}{dx}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\theta}{dz} = \frac{K}{CV}\Delta_2\theta.$$

On y joindra les conditions évidentes, relatives aux limites, et dont la première exprime que les vitesses d'écoulement sur le corps lui sont tangentes :

$$(2) \qquad \text{(à la surface du corps)} \quad \begin{cases} \lambda\dfrac{d\beta}{dx} + \mu\dfrac{d\beta}{dy} + \nu\dfrac{d\beta}{dz} = 0, \\ \theta = \theta_0(x, y, z), \end{cases}$$

$$(3) \quad (\text{pour } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ infini}) \quad \frac{d\beta}{d(x, y, z)} = (l, m, n), \quad \theta = 0.$$

---

en moyenne, dans le même rapport que la surface totale; car la conductibilité fictive h ne paraît pas s'écarter beaucoup de $1,3\sqrt{\dfrac{KCV}{L}}$.

où λ, μ, ν désignent les trois cosinus directeurs de la normale au corps, menée dans le fluide.

6. Pour nous débarrasser d'abord de la troisième variable, z, choisissons comme solide un cylindre de longueur indéfinie, à température θ_0 uniforme le long de chaque génératrice, et dont l'axe, pris pour celui des z, soit normal au courant; en sorte que l'on ait ν, u nuls et, par raison de symétrie, β, θ indépendants de z. Le potentiel $V\beta$ des vitesses étant supposé obtenu dans toute la partie du plan des xy extérieure au cylindre, les lignes d'égal potentiel, $\beta =$ const., seront, loin du cylindre, des droites normales au courant général et équidistantes de $d\beta$. En effet, si ds désigne la petite perpendiculaire menée, en (x, y), à la ligne β, jusqu'à la rencontre de la suivante $\beta + d\beta$, le paramètre différentiel $V\Delta_1\beta$ du potentiel, valeur de la dérivée $\frac{d.V\beta}{ds}$ ou $V\frac{d\beta}{ds}$, prise le long du chemin ds, exprimera, comme on sait, la vitesse même du courant en (x, y), vitesse qui est V *loin du corps :* on y aura donc bien $ds = d\beta$. Et il en sera ainsi, même pour les lignes d'égal potentiel qui, prenant les plus fortes courbures près du cylindre, s'y interrompent ou y aboutissent; ce qu'elles font en étant perpendiculaires aux filets fluides et, par suite, au contour même du cylindre, où glisse l'un d'eux.

Ces lignes $\beta =$ const. interceptées par la section du cylindre ont, évidemment, leur paramètre β compris entre un minimum β_0 et un maximum β_1 définissant respectivement la première et la dernière d'entre elles, savoir, les deux chez lesquelles les points d'interruption se rejoignent, à l'avant du corps, pour l'une, à l'arrière, pour l'autre, et deviennent, sur leurs courbes respectives, un *point ou de rebroussement, ou, plutôt, double* (vu la continuation possible de ces courbes à l'intérieur du cylindre par des branches étrangères à la question physique). Les filets fluides constituant partout les trajectoires orthogonales aux lignes d'égal potentiel, celui d'entre eux qui arrive, de l'amont, au premier de ces points singuliers (situé sur la ligne β_0), est le seul qui puisse atteindre la section du cylindre et, par une déviation géométriquement brusque, mais *dynamiquement continue* (grâce à un ralentissement momentané), contourner cette section : il s'y bifurque donc

en deux branches qui, laissant entre elles le cylindre, se rejoignent au second point singulier (où $\beta = \beta_1$), le seul où elles puissent quitter le cylindre, pour continuer ensemble leur course à l'aval du corps. Je dis que sa vitesse s'atténue infiniment aux deux points singuliers; car les deux lignes β_0, β_1, pour atteindre sous un angle *sensible* la section droite du cylindre, s'y éloignent incomparablement plus qu'ailleurs de leurs voisines extérieures, encore continues; et, par conséquent, leurs écarts ds d'avec celles-ci s'y exagèrent sans mesure, en rendant d'autant moindre le paramètre différentiel $\frac{d.V\beta}{ds}$, expression, partout, de la vitesse d'écoulement.

Nous appellerons ce filet fluide le filet *axial* ou *central*. Les autres, bien continus, se disposeront de part et d'autre de celui-là. Leur équation sera $\alpha =$ const., si α est la fonction de x et de y définie par la formule

$$(4) \qquad \alpha = \int \left(\frac{d\beta}{dy} dx - \frac{d\beta}{dx} dy \right) + \text{const.},$$

dont l'intégrabilité a justement pour condition, comme on voit, l'équation satisfaite $\Delta_2 \beta = 0$, et qui vérifie aussi, identiquement, la relation

$$(4\ bis) \qquad \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} = 0$$

d'orthogonalité de la famille $\alpha =$ const. aux lignes d'égal potentiel $V\beta$.

Nous déterminerons, dans (4), la constante arbitraire, de manière à annuler α sur le filet central. Les valeurs de α positives définiront les filets situés du côté du filet central où x grandit, à partir de ce filet, là où il est dirigé suivant les y positifs et où, par suite, la dérivée de β en x est nulle, mais la dérivée de β en y positive; ce qui, d'après (4), donne bien $d\alpha$ de même signe que dx. Au contraire, α recevra ses valeurs négatives, pour les filets situés de l'autre côté du filet central ou contigus à sa seconde branche.

7. Cela posé, adoptons α, β comme coordonnées curvilignes, à la place des rectilignes x, y. D'après (4), $\Delta_2 \alpha$ s'annulera comme $\Delta_2 \beta$, et

les paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1 \alpha$, $\Delta_1 \beta$ auront une valeur commune h. Or il résulte de là que le premier membre de l'équation (1) en θ, et le facteur variable $\Delta_2 \theta$ du second membre, deviendront les deux produits respectifs de h^2 par la dérivée première de θ en β et par la somme des deux dérivées secondes directes de θ en α et en β. L'équation indéfinie en θ sera donc

$$(5) \qquad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{K}{CV}\left(\frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \frac{d^2\theta}{d\beta^2}\right).$$

Et comme, d'autre part, si $f(\beta)$ et $f_1(\beta)$ sont les deux expressions, en β, des températures θ_0 données respectivement le long des deux branches du filet central, la condition $\theta = \theta_0$ relative à la surface du cylindre devient

$$(6) \quad (\text{pour } \alpha = 0 \text{ et } \beta \text{ compris entre } \beta_0 \text{ et } \beta_1) \quad \theta = \text{soit } f(\beta), \text{ soit } f_1(\beta),$$

le problème de calcul intégral auquel on se trouve ramené est le même pour toutes les formes du cylindre, ou identique à ce qu'il serait dans l'hypothèse simple $\alpha = x$, $\beta = y$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un plateau mince présentant sa tranche au courant et ne le troublant pas.

8. Dans la plupart des fluides, l'extrême petitesse de la conductibilité K maintient l'annulation de θ, à très peu près, le long des filets un peu distants du corps ou dont le paramètre α n'est pas voisin de zéro. Seul, le filet $\alpha = 0$ se chauffe *par contact* : ce qu'il fait dans l'intervalle de $\beta = \beta_0$ à $\beta = \beta_1$; et il ne communique que lentement sa chaleur à ses voisins. Donc les valeurs notables de θ n'existent, pour ces fluides, que dans un champ étroit, de part et d'autre de $\alpha = 0$, et pour β croissant depuis β_0, environ, jusqu'à l'infini. Elles sont même, au voisinage de $\beta = \beta_0$, c'est-à-dire à l'avant du corps, là où varie vite la température du filet central, incomparablement plus localisées, près de $\alpha = 0$, que sur les côtés du corps, ou surtout à son arrière et en aval, où augmente peu à peu d'épaisseur la mince couche des filets chauffés.

Dès lors, dans ce champ étroit auquel on peut se borner, θ varie très vite avec α, mais graduellement avec β. Donc le troisième ou dernier

terme de (5) s'efface devant le second, laissant à cette équation la forme binome

$$(5\ bis) \qquad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{K}{CV}\frac{d^2\theta}{dx^2}$$

de celle de Fourier pour l'échauffement d'un mur. D'ailleurs, si l'on appelle $f(\beta)$ les valeurs de θ pour $\alpha = 0$, ces valeurs, nulles de $\beta = -\infty$ à β peu inférieur à β_0, ne seront inconnues que dans une étendue très restreinte, à l'approche de la limite β_0, au-dessus de laquelle elles deviennent θ_0, c'est-à-dire la fonction $f(\beta)$ ou $f_1(\beta)$ de (6), suivant qu'il s'agit de considérer les filets correspondant à α positif ou à α négatif. Enfin, pour $\beta > \beta_1$, $f(\beta)$, dont on n'aura guère à s'occuper dans ces régions, gardera assez longtemps la valeur $f(\beta_1)$, la petitesse de K rendant lent le refroidissement du filet central, une fois ce filet *détaché* du corps.

L'expression des valeurs sensibles de θ sera donc, aux notations près, celle que j'ai donnée pour le cas d'un plateau mince ([1]), expression résultant d'une intégrale, bien connue, de l'équation (5 *bis*). Et l'on aura, en y joignant l'expression corrélative de la dérivée de θ en α, prise pour $\alpha = 0$ et, par exemple, du côté des α positifs :

$$(7) \qquad \begin{cases} \theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f\left(\beta - \frac{CV}{K}\frac{\alpha^2}{2\nu^2}\right)e^{-\frac{\nu^2}{2}}d\nu, \\ \left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 = -2\sqrt{\frac{CV}{\pi K}}\int_0^\infty f'(\beta - \omega^2)\,d\omega. \end{cases}$$

§ III. — Pouvoir refroidissant du courant sur le cylindre; applications à un plateau mince, au cylindre circulaire, aux cylindres elliptiques, à une armille.

9. Le flux de chaleur, $F\,ds$, qu'émet, dans l'unité de temps et par unité de longueur du cylindre, la surface de celui-ci projetée suivant un élément ds du contour, aura l'expression $-K\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0(\Delta_1\alpha)ds$, égale

([1]) *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière*, t. II, p. 191 et 192.

à $-K\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0(\Delta_1\beta)\,ds$ ou, enfin, à $-K\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 d\beta$; et la somme des flux ainsi emportés par toute la branche des filets bifurqués venue du côté des α positifs en sera l'intégrale, prise de $\beta=\beta_0$ à $\beta=\beta_1$. Sa formule est donc

$$(8)\quad \begin{cases} 2\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_0^\infty d\omega\int_{\beta_0}^{\beta_1} f(\beta-\omega^2)\,d\beta \\ = 2\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_0^\infty [f(\beta_1-\omega^2)-f(\beta_0-\omega^2)]\,d\omega. \end{cases}$$

Or $f(\beta_0-\omega^2)$ n'est sensible que pour les valeurs extrêmement petites de ω; et $f(\beta_1-\omega^2)$ ne l'est que pour les valeurs de $\beta_1-\omega^2$ supérieures ou à peine inférieures à β_0. On peut donc supprimer sous le signe $\int$ le terme $-f(\beta_0-\omega^2)$ et réduire à $\sqrt{\beta_1-\beta_0}$ la limite supérieure d'intégration. Le second membre de (8), accru de l'expression analogue correspondant à la seconde branche des filets $\alpha=0$, donne donc pour le *pouvoir refroidissant* du courant, chaleur totale que ce courant enlève au cylindre *par unités de temps et de longueur*, la formule

$$(9)\quad \begin{cases} \text{Pouvoir refroidissant} \\ = 2\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\beta_1-\beta_0}} [f(\beta_1-\omega^2)+f_1(\beta_1-\omega^2)]\,d\omega \\ = 4\theta_0\sqrt{\frac{KCV}{\pi}(\beta_1-\beta_0)}, \end{cases}$$

où le dernier membre est obtenu dans l'hypothèse d'un excès

$$\theta_0=f(\beta)$$

de température constant sur tout le cylindre.

10. Ainsi, *le pouvoir refroidissant est proportionnel aux racines carrées de la conductibilité intérieure* K *du courant, de sa capacité calorifique* C, *de sa vitesse* V, *et aux excès* θ_0 *de température du cylindre, ainsi qu'à la racine carrée de l'espacement* $\beta_1-\beta_0$, *loin du*

cylindre, des deux surfaces d'égal potentiel $V\beta$ entre lesquelles le cylindre se trouve compris.

Pour toutes les formes de la section droite semblables et semblablement disposées par rapport au courant, les surfaces d'égal potentiel sont, évidemment, semblables aussi, chacune à chacune; et l'espacement $\beta_1 - \beta_0$ y est, par suite, proportionnel au contour de la section, parcours total, sur cette section même, des deux branches en lesquelles s'est divisé le filet central. Nous appellerons $2L$ ce contour, ou L le *parcours moyen des filets sur le corps. Le pouvoir refroidissant sera donc, pour tous les cylindres de même forme, proportionnel au produit* $\theta_0\sqrt{KCVL}$.

Il est naturel de caractériser le pouvoir refroidissant en le rapportant, tout à la fois, à l'unité de surface du corps et à l'unité de l'excès θ_0 de température de cette surface sur le courant général; car le quotient, que j'appellerai k, ainsi obtenu sera, pour le corps, un coefficient fictif de *conductibilité extérieure* équivalant à l'influence réfrigérante du courant, savoir, le coefficient qui donnerait lieu, dans le vide, lors d'un excès pareil θ_0 de température du corps sur l'espace ambiant, à une sortie de chaleur égalant précisément celle que provoque le courant. Comme la surface de l'unité de longueur du cylindre est $2L$, le quotient du dernier membre de (9) par $2L\theta_0$ conduira, pour cette évaluation du pouvoir réfrigérant en conductibilité extérieure, à la formule

$$(10) \qquad k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{KCV\frac{\beta_1-\beta_0}{L^2}}.$$

On voit que, *pour tous les cylindres de même forme, la conductibilité extérieure fictive, k, représentative du pouvoir refroidissant d'un courant fluide, sera proportionnelle aux racines carrées de la conductibilité intérieure du courant, de sa capacité calorifique par unité de volume, de sa vitesse générale et de l'inverse du parcours moyen de ses filets sur le corps.*

Cette dernière influence se conçoit en observant, comme je l'ai fait au Tome II (p. 195) de mes leçons sur la *Théorie analytique de la Chaleur*, qu'un faisceau de filets contigu au corps s'est déjà chauffé d'autant plus, après un certain parcours sur lui, et reste d'autant moins apte à le refroidir, qu'il l'a suivi plus longtemps.

11. Le cas le plus simple est celui d'un plateau mince, présentant sa tranche au courant, ou qui ne dévie pas les filets fluides dans une mesure sensible. L'espacement des surfaces d'égal potentiel y est donc le même près du corps qu'au loin et la différence $\beta_1 - \beta_0$ s'y réduit au trajet L des filets fluides sur le plateau, c'est-à-dire à la largeur de celui-ci. On a donc

$$(11) \qquad \text{(pour un plateau mince)} \quad k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\mathrm{L}}} \quad (^1).$$

12. Imaginons maintenant que la section droite soit le cercle, de rayon R, ayant pour équation $x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$, où nous supposerons la coordonnée y prise suivant le sens du courant.

Partant d'une fonction φ de x et de y dont le paramètre Δ_2 dans le plan des xy soit nul, nous essayerons de poser

$$(12) \qquad \alpha = x - \frac{d\varphi}{dx}, \quad \beta = y + \frac{d\varphi}{dy} + \text{const.},$$

expressions qui vérifient identiquement les conditions

$$\Delta_2 \beta = 0, \quad \Delta_2 \alpha = 0, \quad \Delta_1 \alpha = \Delta_1 \beta, \quad \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} = 0,$$

(1) La multiple proportionnalité des flux émis et aussi, par suite, du pouvoir refroidissant, à $\sqrt{\mathrm{KCV}}$, ne subsiste généralement plus quand cesse d'être petit le coefficient $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CV}}$ de l'équation indéfinie (5), coefficient dont nous appellerons c l'inverse. Pour le reconnaître sur un exemple particulier, supposons le plateau indéfini dans les deux sens, ou s'étendant de $\beta = -\infty$ à $\beta = +\infty$, avec des températures θ_0 de la forme $e^{m\beta}$, évanouissantes, comme on l'admet, aux grandes distances en amont, mais croissantes vers l'aval. L'équation (5), et les deux conditions adjointes $\theta = \theta_0$ (pour $\alpha = 0$), $\theta = 0$ (pour α infini), se trouvent alors satisfaites par la solution simple, exponentielle, $\theta = e^{m\beta - \sqrt{cm - m^2}\,\alpha}$; et le flux, $-\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0$, émanant vers les α positifs de l'unité d'aire du plateau, vaut $\mathrm{K}\theta_0\sqrt{cm - m^2}$ ou $\theta_0\sqrt{\mathrm{KCV}\,m\left(1 - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CV}}m\right)}$. C'est seulement quand le produit $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CV}}m$ est petit vis-à-vis de l'unité, que ce résultat peut être réduit à $\theta_0\sqrt{\mathrm{KCV}\,m}$ et devient proportionnel aux racines carrées des trois paramètres K, C, V du courant.

dont les trois dernières résultent de la première et de l'équation (4), également vérifiée. Comme les cosinus directeurs l, m, n de la vitesse V seront 0, 1, 0, les trois premières relations (3) se trouveront satisfaites, si nous choisissons φ proportionnel au logarithme népérien de la distance $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ au centre, logarithme qu'on sait avoir son Δ_2 nul et ses dérivées partielles évanouissantes pour ρ infini. Après quoi, nous déterminerons le coefficient de proportionnalité, de manière à vérifier la première condition (2) exprimant la perpendicularité des lignes $\beta =$ const. au cercle de rayon R. Il viendra ainsi

$$(13) \qquad \alpha = x\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right), \quad \beta = y\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right) + \text{const.}$$

On voit, en remplaçant ρ^2 par $x^2 + y^2$, que les filets et les lignes d'égal potentiel sont des courbes du troisième degré, symétriques, les premières, par rapport à l'axe des x, les secondes, par rapport à l'axe des y [1]; et que, hors de la section $\rho = R$, les filets correspondant aux petites valeurs absolues de α sont bien, partout, soit à de très petites distances $\pm x$ de l'axe des y, en s'en tenant constamment du côté où x a le signe de α, soit à de très petites distances de la section

---

[1] Les deux courbes singulières β_0, β_1 étant celles qui passent par les deux points $x = 0$, $y = \pm R$, leurs équations sont

$$y(x^2 + y^2 + R^2) = \pm 2R(x^2 + y^2),$$

ou bien, en posant $x = R\xi$, $y = \pm R(1 + \eta)$, substituant et réduisant,

$$\xi^2(1 - \eta) = \eta^2(1 + \eta), \text{ c'est-à-dire enfin } \frac{\xi}{\eta} = \pm\sqrt{\frac{1 + \eta}{1 - \eta}}.$$

L'on voit que, aux environs du point singulier ($\xi = 0$, $\eta = 0$), chacune d'elles ressemble au système des deux droites rectangulaires exprimées par l'équation $\frac{\xi}{\eta} = \pm 1$, ou se croisant symétriquement par rapport à l'axe des y. Les deux points singuliers sont donc *doubles* et non *de rebroussement*. Cette inclinaison à 45° sur l'axe des y établit la transition la plus naturelle possible entre la perpendicularité, sur les y, des courbes β, bien continues, entièrement extérieures au cylindre, et le quasi-parallélisme final aux y, des courbes β voisines coupées par le cylindre, sur lequel elles arrivent normalement.

$\rho = R$, sans la couper non plus. Et le filet central $\alpha = 0$ contourne bien le corps.

On voit aussi que, sur le cylindre, où $\rho = R$, la valeur de β devient $2y +$ const.; et que son accroissement total $\beta_1 - \beta_0$, entre $y = -R$ et $y = R$, est $4R$, c'est-à-dire le produit, par $\frac{4}{\pi}$, du trajet $L = \pi R$ des filets sur le corps. La formule générale (10) devient

$$(14) \qquad \text{(pour un cylindre circulaire)} \quad k = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique, $\frac{4}{\pi}$, de l'expression de k est donc, pour un contour circulaire, le carré de ce qu'il est, d'après (11), pour un contour rectiligne (c'est-à-dire infiniment aplati); et il égale l'inverse du rapport, $\frac{\pi}{4}$, de la circonférence, au périmètre du carré circonscrit. Ce coefficient, caractéristique du pouvoir refroidissant pour les diverses formes de la section droite, grandit ainsi, comme on pouvait s'y attendre, avec la convexité de la section sur le parcours L des filets fluides.

15. On peut regarder les deux formes précédentes, rectiligne et circulaire, comme les deux cas extrêmes d'une section elliptique, dont on donnerait les axes $2a$, $2b$ et l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dans ce cas, il y aura lieu de considérer les ellipses homofocales de celle-là et qui lui sont extérieures. Leur équation sera

$$(15) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

où λ désigne un paramètre, fonction déterminée de x et de y définie par cette équation même, constant sur chacune de ces ellipses, mais croissant de zéro à l'infini quand on les construit de plus en plus grandes autour de la proposée.

Alors les équations (1), (2) et (3) en β s'intègrent de la même manière, ou avec les mêmes calculs, que pour l'ellipsoïde dont les homofocaux auraient en plus, au premier membre de leur équation, le

terme $\frac{z^2}{c^2+\lambda}$. Quel que soit le nombre n (1, 2 ou 3) des coordonnées $x, y, \ldots$, il existe n solutions analogues, convenant aux cas respectifs de courants dirigés suivant les divers axes, solutions de la forme $x\chi$, ou $y\psi, \ldots$, dans lesquelles $\chi, \psi, \ldots$ sont des fonctions convenablement déterminées de λ. Par exemple, dans celle qui a la forme $\beta = x\chi$, si l'on veut que les dérivées $\frac{d\beta}{d(x, y, \ldots)}$ deviennent respectivement 1, 0, 0, ... pour λ infini, la fonction χ doit, d'abord, pour donner

$$\Delta_2\beta = 0,$$

satisfaire à l'équation différentielle

$$\text{(16)} \qquad \frac{\chi''}{\chi'} + \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \ldots\right) = 0,$$

et, finalement, pour vérifier les conditions (2) et (3) en β, recevoir l'expression

$$\text{(17)} \qquad \chi = 1 + \frac{1}{A}\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\ldots}},$$

où A désigne la constante

$$\text{(18)} \qquad A = \frac{2}{ab\ldots} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\ldots}} \text{ (}^1\text{)}.$$

14. Dans le cas présent des deux coordonnées x et y, il faudra faire abstraction de c et de z, ou, ce qui revient au même, prendre c infini pour passer de l'ellipsoïde au cylindre elliptique. Alors c disparaît des formules (17) et (18), comme facteur commun figurant, en dénominateur, dans A et dans l'intégrale définie que contient l'expression

---

(1) On peut voir, à ce sujet, par exemple, les pages 217 à 219 du Tome II de mes leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, etc.* Seulement, comme ici χ devient 1 (et non zéro) à l'infini, c'est $\chi - 1$ qui se trouve appelé φ dans les pages citées; ce qui y modifie légèrement la condition (2) en β, dont un terme se trouve, finalement, changé de membre.

(17) de χ. Or cette intégrale définie, ainsi réduite, devient identiquement $\frac{2}{a^2-b^2}\left(1-\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right)$, comme le montre une différentiation immédiate; et l'expression de A devient elle-même $\frac{2}{b(a+b)}$. L'on a dès lors

$$(19)\left\{\begin{aligned}\chi &= 1+\frac{b}{a-b}\left(1-\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right)=\frac{1}{a-b}\left(a-b\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right),\\ \beta &= \frac{x}{a-b}\left(a-b\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right).\end{aligned}\right.$$

Puisque la solution générale β cherchée ici doit avoir, pour x ou y infinis, ses deux dérivées en x et y respectivement égales aux deux cosinus directeurs l, m du courant, il ne reste plus qu'à multiplier par l cette solution particulière (19), par m la solution analogue $y\psi$, et à faire la somme. Il viendra donc, à une constante arbitraire près,

$$(20)\quad \beta=\frac{lx}{a-b}\left(a-b\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}\right)+\frac{my}{b-a}\left(b-a\sqrt{\frac{a^2+\lambda}{b^2+\lambda}}\right).$$

Sur le cylindre, où λ s'annule, cette expression admet successivement, vu la relation $l^2+m^2=1$, les formes

$$(21)\left\{\begin{aligned}\beta &= (a+b)\left(l\frac{x}{a}+m\frac{y}{b}\right)\\ &=\pm(a+b)\sqrt{(l^2+m^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(l\frac{y}{b}-m\frac{x}{a}\right)^2}\\ &=\pm(a+b)\sqrt{1-l^2m^2\left(\frac{x}{la}-\frac{y}{mb}\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

La dernière montre que le minimum β_0 et le maximum β_1 se réalisent en deux points opposés, pour $x=\mp la$, $y=\mp mb$, et qu'ils valent $\mp(a+b)$. Ainsi, l'*espacement* $\beta_1-\beta_0$, *loin du cylindre, des deux lignes d'égal potentiel entre lesquelles est compris le contour du cylindre, égale la somme des axes* $2a$, $2b$, *de la section elliptique; et les points singuliers respectifs* $(\mp la, \mp mb)$ *de ces lignes se trouvent aux deux extrémités d'un même diamètre.*

Comme, d'ailleurs, le parcours L, sur le cylindre, de chaque branche

du filet central qui le contourne, est justement le demi-périmètre elliptique reliant, du côté correspondant, les deux extrémités de ce diamètre, si l'on appelle S le périmètre entier de l'ellipse, S′ celui du rectangle circonscrit à côtés dirigés suivant les axes (de sorte qu'on ait $L = \frac{1}{2}S$, $\beta_1 - \beta_0 = \frac{1}{2}S'$), la formule générale (10) donnera

$$(22) \qquad \text{(pour le cylindre elliptique)} \quad k = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{S'}{S}}\right)\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Donc, *quand le cylindre a pour section droite une ellipse, la conductibilité extérieure k, représentative du pouvoir refroidissant, est indépendante de la direction du courant dans le plan des deux axes de cette ellipse; et son coefficient numérique,* $\sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{S'}{S}}$, *variable avec la forme de l'ellipse, comme la racine carrée du rapport du contour rectangulaire circonscrit à l'ellipse suivant les axes, au contour de l'ellipse, est la moyenne proportionnelle entre ce rapport lui-même et sa valeur maxima ou finale* $\frac{4}{\pi}$, *relative au cylindre circulaire.* Il grandit à mesure que l'ellipse, d'abord infiniment aplatie, se rapproche du cercle [1], conformément à ce qu'on a vu après la formule (14).

Il est remarquable que, pour un plateau mince, à profil elliptique infiniment aplati, ce coefficient soit, comme pour toute autre forme elliptique du profil, indépendant de l'angle fait par le courant général avec le grand axe de l'ellipse.

---

[1] On le reconnaît aisément sur la formule du contour S, approchée (sauf pour les ellipses très aplaties), que j'ai donnée dans mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Partie élémentaire*, p. 112). Cette expression est $S = \pi\left(3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$. Divisée par le contour $4(a+b)$ du rectangle circonscrit, elle donne

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi}{8}\left(3 - \frac{\sqrt{2a.2b}}{a+b}\right),$$

valeur visiblement croissante quand la moyenne géométrique $\sqrt{2a.2b}$ des axes a un rapport de plus en plus faible à leur moyenne arithmétique $a+b$, c'est-à-dire quand l'ellipse s'éloigne de la forme circulaire.

15. L'expression (22) de k devra pouvoir servir au calcul de la chaleur cédée à l'air par une armille ou une barre à sections elliptiques, se refroidissant dans un courant perpendiculaire au plan de son axe longitudinal, circulaire ou non. En effet, si les axes, $2a$, $2b$, des sections sont assez petits par rapport aux rayons de courbure de l'axe longitudinal, les tronçons de l'armille ou de la barre ne différeront pas sensiblement de notre cylindre elliptique de longueur indéfinie.

§ IV. — Échauffement, par un corps de révolution, d'un courant fluide l'enveloppant et dirigé suivant son axe.

16. On n'a encore que deux variables indépendantes, dans le problème de l'échauffement permanent d'un courant fluide indéfini par un corps fixe qui s'y trouve immergé, lorsque le corps est de révolution autour d'un axe parallèle au courant général, et qu'on maintient sa surface à une même température θ_0 le long de chaque (cercle) parallèle. Alors, par raison de symétrie, les surfaces $\beta =$ const. d'égal potentiel sont elles-mêmes de révolution autour de l'axe, et les filets fluides suivent leurs trajectoires orthogonales dans les plans méridiens. Si l'axe de révolution est pris comme axe des y, les deux variables dont dépendront β et θ seront, pour chaque point (x, y, z) du fluide, la perpendiculaire, r, égale à $\sqrt{x^2+z^2}$, abaissée du point sur cet axe, et la distance, y, de son pied à l'origine.

La relation $\Delta_2\beta = 0$, multipliée par r, deviendra, comme on sait, $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\beta}{dr}\right) + \frac{d}{dy}\left(r\frac{d\beta}{dy}\right) = 0$; de sorte que l'équation différentielle (dans un plan méridien) $\frac{d\beta}{dy}dr - \frac{d\beta}{dr}dy = 0$, des filets fluides, orthogonaux aux lignes $\beta =$ const., admettra le facteur d'intégrabilité r. Les filets auront donc l'équation finie $\alpha =$ const., si l'on pose

$$\alpha = \int r\left(\frac{d\beta}{dy}dr - \frac{d\beta}{dr}dy\right) + \text{const.}, \tag{23}$$

formule où nous effectuerons l'intégration de manière que α s'annule sur le *filet central*.

Celui-ci coïncide avec l'axe des y depuis $y = -\infty$ jusqu'à la ren-

centre du corps à son premier pôle, où le filet s'étale, encore par raison de symétrie, en une nappe recouvrant toute la surface. Au second pôle, les filets élémentaires composant la nappe se rejoignent, pour continuer ensemble et indéfiniment leur trajet sur l'axe des y.

Dans chaque plan méridien, les autres filets fluides, bien continus, auront leur paramètre α positif. En effet, l'équation (23) donne α croissant, à partir de zéro, quand on s'éloigne du premier filet, considéré au point où r y est maximum. Car, en ce point, où la vitesse se trouve dirigée suivant les y positifs, la dérivée en r du potentiel $V\beta$ est nulle, mais, sa dérivée en y, positive : ce qui, d'après (23), y rend $d\alpha$ de même signe que dr.

D'ailleurs, toutes les surfaces $\beta =$ const. interrompues par le corps ont leur paramètre compris entre un minimum β_0 et un maximum β_1, caractérisant les deux d'entre elles qui aboutissent respectivement au premier pôle et au second pôle, où, vu leur inclinaison finie sur le corps, elles présentent un *point conique*, le seul par lequel le filet central puisse, soit atteindre le corps en s'y divisant, soit le quitter après reconstitution de son unité.

17. Cela posé, adoptons α et β comme variables, au lieu de r et y. D'après (23), on n'aura plus, comme dans le cas du cylindre,

$$\Delta_1 \alpha = \Delta_1 \beta,$$

ni $\Delta_2 \alpha = 0$, mais seulement $\Delta_1 \alpha = r \Delta_1 \beta$; et un calcul simple montre que $\Delta_2 \alpha$ vaudra le double de la dérivée première de β en y. Par suite, l'équation (1) en θ, où θ sera fonction de x, y, z par l'intermédiaire de α et de β, deviendra aisément, après division par $(\Delta_1 \beta)^2$,

$$(24) \qquad \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{K}{CV} \left[r^2 \frac{d^2\theta}{d\alpha^2} + \frac{2}{(\Delta_1 \beta)^2} \frac{d\beta}{dy} \frac{d\theta}{d\alpha} + \frac{d^2\theta}{d\beta^2} \right].$$

La présence de r et des dérivées premières de β au second membre empêche cette équation d'être, comme quand il s'agissait d'un cylindre, indépendante de la forme du corps. Mais, si le courant est peu conducteur, ou que θ soit sensible seulement pour une assez mince couche fluide ruisselant sur le corps, c'est-à-dire pour les petites valeurs de α, la dérivée seconde de θ en α prédominera, dans la parenthèse de (24),

au point de rendre celle-ci réductible à son premier terme, en même temps que le coefficient r^2 lui-même le sera à sa valeur sur le corps, fonction de β censée connue. Introduisons alors, au lieu de β, la nouvelle variable $\beta' = \int r^2 d\beta$, croissante de zéro à une certaine valeur β'_1 entre les deux limites $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$; et nous aurons encore, en θ, pareillement à (5 *bis*), l'équation binome de Fourier

$$(25)\qquad \frac{d\theta}{d\beta'} = \frac{K}{CV}\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}.$$

Il en résultera donc l'intégrale et la formule, analogues à (7),

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f\left(\beta' - \frac{CV}{K}\frac{\alpha^2}{2\nu^2}\right)e^{-\frac{\nu^2}{2}}d\nu, \\ \left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 &= -2\sqrt{\frac{CV}{\pi K}}\int_0^\infty f'(\beta' - \omega^2)\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

La fonction $f(\beta')$ y exprime les températures θ du filet central $\alpha = 0$, savoir, les valeurs θ_0, données, entre $\beta' = 0$, $\beta' = \beta'_1$, et des valeurs *nulles* hors de ces limites. Il faut remarquer, en effet, que, r s'annulant sur le filet central, soit pour $\beta < \beta_0$, soit pour $\beta > \beta_1$, les valeurs négatives de β' et ses valeurs supérieures à β'_1 correspondent respectivement à $\beta = -\infty$ et à $\beta = \infty$, c'est-à-dire aux points du filet central infiniment éloignés du corps et où $\theta = 0$.

La substitution de β' à β comme variable transforme donc l'expression du phénomène en *accourcissant*, pour ainsi dire, dans un rapport infini, les circonstances produites tant à l'amont qu'à l'aval du corps et, dès lors, peu intéressantes au point de vue du pouvoir refroidissant : ce qui constitue, ici, plutôt un avantage, puisque l'évaluation du pouvoir refroidissant est notre but principal.

§ V. — Pouvoir refroidissant du courant fluide sur le corps de révolution : applications à la sphère, à l'ellipsoïde, au plateau circulaire, à une aiguille.

18. Le flux de chaleur émis, dans l'unité de temps, par une zone élémentaire $2\pi r\,ds$ de la surface sera, si dn est une petite normale à

la zone, menée dans le fluide, le produit de l'aire $2\pi r\,ds$ par

$$-\mathrm{K}\frac{d\theta}{dn} = -\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 \frac{d\alpha}{dn} = -\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 \Delta_1\alpha,$$

savoir

$$-2\pi\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 r^2(\Delta_1\beta)\,ds,$$

ou

$$-2\pi\mathrm{K}\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 d\beta'.$$

Intégrons de $\beta' = 0$ à $\beta' = \beta'_1$, après avoir remplacé la dérivée de θ en α par son expression (26); et nous aurons, comme chaleur totale soustraite au corps par le courant dans l'unité de temps, en opérant de même qu'au n° **9**, puis admettant, finalement, l'uniformité de θ_0 :

$$(27)\quad \begin{cases} \text{Pouvoir refroidissant} = 4\sqrt{\pi\mathrm{KCV}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\beta'_1}} f(\beta'_1 - \omega^2)\,d\omega \\ \qquad = 4\theta_0\sqrt{\pi\mathrm{KCV}\beta'_1}. \end{cases}$$

Le pouvoir refroidissant est donc proportionnel aux racines carrées de la conductibilité K *du courant, de sa chaleur spécifique* C *par unité de volume, de sa vitesse* V, *et proportionnel aussi à l'excès* θ_0 *de température du corps, en même temps qu'à la racine carrée de l'intégrale* β'_1, *laquelle, pour tous les corps de même forme, orientés de même dans le courant, est en raison directe de leur volume.*

Évaluons ce pouvoir en conductibilité extérieure k, comme au n° **10**, en le rapportant à l'unité des excès θ_0 de température du corps et à l'unité de son aire totale σ, c'est-à-dire en le divisant par $\theta_0\sigma$. Nous aurons

$$(28)\qquad k = 4\sqrt{\pi\mathrm{KCV}\frac{\beta'_1}{\sigma^2}},$$

expression entièrement analogue à (10), ou produit d'un facteur, constant pour chaque forme du corps, par $\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\mathrm{L}}}$; car le quotient du carré σ^2 de l'aire du corps, par la quantité à trois dimensions β'_1, sera

proportionnel, chez tous les corps semblables (et bien entendu semblablement placés dans le courant), à une de leurs lignes homologues, notamment à leur demi-méridien L, mesurant le trajet, sur le corps même, de tous les filets élémentaires en lesquels se divise ou s'épanouit le filet central.

19. Soit d'abord le cas de la sphère de rayon R, où l'on a

$$r^2 + y^2 = R^2.$$

La dérivée de β en y devant devenir 1 aux distances $\rho = \sqrt{r^2 + y^2}$ du centre infinies, attribuons à β, comme dans le cas du cylindre circulaire (n° **12**), mais en remplaçant actuellement x par r dans l'expression de ρ, la forme

$$\beta = y + \frac{d\varphi}{dy} + \text{const.},$$

où φ sera encore une fonction à paramètre différentiel Δ_2 nul et à dérivées évanouissantes pour ρ infini. La plus simple de ces fonctions est, comme on sait, le quotient d'une constante par la distance ρ du point (x, y, z) à l'origine. Substituons donc ce quotient à φ; et déterminons la constante de manière à vérifier, si c'est possible, la condition (2) en β, devenue ici, dans le plan méridien,

$$(\text{pour } \rho = R) \quad r\frac{d\beta}{dr} + y\frac{d\beta}{dy} = 0.$$

L'on obtient ainsi, pour la constante, la valeur $-\frac{1}{2}R^3$; et il en résulte définitivement

$$(29) \qquad \beta = y\left(1 + \frac{R^3}{2\rho^3}\right) + \text{const.}$$

Après quoi, l'équation (23) donne pour α l'expression

$$(30) \qquad \alpha = \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{R^3}{\rho^3}\right).$$

Les lignes d'égal potentiel et les filets fluides ont, on le voit, des

formes notablement plus compliquées que dans le cas du cylindre circulaire. Mais, dans l'espace occupé par le fluide, c'est-à-dire pour ρ au moins égal à R, le filet central reste très simple, comme il le fallait, puisque l'équation $\alpha = 0$ se dédouble en $r^2 = 0$ et $\rho^3 = R^3$: ce qui donne bien, d'une part, la partie de l'axe des y extérieure à la sphère et, d'autre part, toute la surface $\rho = R$ de celle-ci. De même, l'expression de β sur le corps reste très simple aussi, l'hypothèse $\rho = R$ réduisant la formule (29) à $\beta = \frac{3}{2}y + \text{const}$. Il en résulte pour β' et β'_1 les formules respectives, dans la dernière desquelles L désigne le parcours πR des filets sur la sphère :

$$(31)\quad \begin{cases} \beta' = \int r^2 d\beta = \frac{3}{2}\int_{-R}^{y}(R^2 - y^2)\,dy = \frac{R+y}{2}(2R^2 + Ry - y^2), \\ \beta'_1 = \frac{3}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - y^2)\,dy = 2R^3 = \frac{2}{\pi^3}L^3. \end{cases}$$

Portons dans (28), avec cette expression de β'_1 en fonction de L, celle de la surface σ, qui est $4\pi R^2$ ou $\frac{4}{\pi}L^2$; et il viendra

$$(32)\qquad (\text{pour la sphère})\quad k = \sqrt{2}\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique de cette formule, $\sqrt{2}$ ou 1,4142, excède encore celui, $\frac{4}{\pi}$ ou 1,2732, qui est propre au cylindre circulaire, lequel excédait déjà le coefficient $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284$ relatif au plateau. C'est que, conformément à la remarque faite à la fin du n° **12**, il grandit, à égalité du parcours L, avec la convexité de la surface, et que la sphère surpasse le cylindre en convexité, celui-ci étant dépourvu de courbure dans le sens des génératrices rectilignes.

Nous verrons toutefois, au n° **27**, que ces convexités du corps, suivant le sens du filet et suivant le sens perpendiculaire, ne font grandir le coefficient numérique de k, qu'en tant qu'elles accroissent le rapport moyen de la vitesse d'écoulement, sur le corps, du filet de parcours L, à la vitesse générale V du courant, et, surtout, en tant qu'elles rendent relativement plus variable, d'un bout à l'autre de ce trajet L, la largeur de l'étroite bande de surface arrosée par le filet fluide.

20. Passons maintenant de la sphère $x^2+y^2=R^2$ à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

dont a, b sont respectivement le *rayon équatorial* et le *demi-axe polaire*. Les formules (16), (17), (18) s'y appliquent, à cela près que, les cosinus directeurs du courant étant ici (0, 1, 0), β cessera d'être le produit $x\chi$ pour devenir $y\psi$, que, par suite, les constantes a, b, c, A devront être remplacées respectivement par b, c, a, B, et qu'il faudra, d'ailleurs, faire $c=a$. Nous aurons donc

$$(33)\quad \begin{cases} \beta = y\left[1+\frac{1}{B}\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}\right]+\text{const.}, \\ \text{avec} \\ B=\frac{2}{a^2 b}-\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Or, en réduisant la différentielle binome qui figure dans ces formules, on trouve, comme le montre une différentiation immédiate,

$$(34)\quad \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}}}\frac{du}{1+(a^2-b^2)u^2}\right];$$

et, de plus, il vient aisément, suivant que l'ellipsoïde est *aplati* ou *allongé*, c'est-à-dire suivant que a^2 est supérieur ou inférieur à b^2,

$$(35)\quad \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{b^2+\lambda}}}\frac{du}{1+(a^2-b^2)u^2} = \text{soit } \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\lambda}}, \\ \qquad\qquad \text{soit } \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+\lambda}+\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2+\lambda}-\sqrt{b^2-a^2}}}. \end{cases}$$

On aura donc, pour B, les valeurs respectives :

$$(36)\quad \begin{cases} \text{(ellipsoïde aplati)} \\ B = \dfrac{2}{a^2 - b^2}\left(-\dfrac{b}{a^2} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right), \\ \text{(ellipsoïde allongé)} \\ B = \dfrac{2}{b^2 - a^2}\left(\dfrac{b}{a^2} - \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \sqrt{\dfrac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}}\right). \end{cases}$$

A la surface, où $\lambda = 0$, les deux formules (33) donnent, par une réduction évidente,

$$(37)\quad \beta = \frac{2y}{a^2 b B} + \text{const.}, \qquad \beta' = \int r^2 d\beta = \frac{2}{\pi a^2 b B}\int_{-b}^{y} \pi r^2 \, dy.$$

Comme l'intégrale $\int \pi r^2 \, dy$, prise de $\beta = \beta_0$ à $\beta = \beta_1$, c'est-à-dire entre les limites $y = \mp b$, exprime le volume $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ de l'ellipsoïde, la valeur de β'_1 sera $\frac{8}{3B}$, et, finalement, la formule (27) deviendra

$$(38)\qquad \text{Pouvoir refroidissant} = 8\theta_0 \sqrt{\frac{2\pi K C V}{3B}}.$$

Il ne restera plus qu'à y remplacer B par la valeur (36) convenable ; après quoi l'on passerait, s'il y avait lieu, à l'expression (28) de k, peu simple ici en raison des formules compliquées de la surface σ et du demi-méridien L.

21. Bornons-nous aux deux cas extrêmes d'un ellipsoïde ou très aplati, ou très allongé, c'est-à-dire d'un *disque* ou plateau circulaire, de rayon a, et d'une *aiguille*, de longueur $2b$.

Dans le premier cas, où b s'évanouit, l'arc tangente de la première formule (36) devient $\frac{\pi}{2}$ et la valeur de B est

$$(39)\qquad \text{(pour un disque)} \quad B = \frac{\pi}{a^3}.$$

En même temps l'aire σ se réduit aux deux faces du plateau, $2\pi a^2$

en tout, et, le trajet L des filets sur le corps, aux rayons respectifs de ces faces, soit à la somme $2a$. L'on a donc $B = \frac{8\pi}{L^3}$; $\sigma = \frac{\pi}{2} L^2$; et, en divisant par $\theta_0 \sigma$ la formule (38), il vient

$$(40) \qquad \text{(pour un disque)} \quad k = \frac{8}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique $\frac{8}{\pi\sqrt{3}} = 1,4702$ de cette formule excède celui, $\frac{4}{\pi} = 1,2732$, du cylindre circulaire, et celui même, $\sqrt{2} = 1,4142$, de la sphère. Mais, aussi, la convexité de la surface, sur le trajet L des filets, est énorme au passage d'une face du disque à l'autre face (où se renverse brusquement le sens des filets fluides), passage exigeant de grandes vitesses d'écoulement au bord du disque ([1]); et elle rend, en outre, variable au plus haut degré, sur tout le trajet L, la largeur des filets fluides. Ces circonstances font donc grandir le coefficient numérique de k comme il a été dit à la fin du n° **19**; et c'est dans le rapport $\frac{4}{\sqrt{3\pi}} = 1,303$, de $\frac{8}{\pi\sqrt{3}}$ à $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, puisque ce coefficient serait $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ pour un plateau tangent au courant.

Soit maintenant le cas opposé de l'*aiguille*, où le rayon équatorial a est très petit. La seconde formule (36) y donne sensiblement, en observant que le logarithme n'y devient grand que de l'ordre de $\log \frac{b}{a}$, ou bien moins que le terme algébrique,

$$(41) \qquad \text{(pour une aiguille)} \quad B = \frac{2}{ba^2}.$$

Or, en même temps, la surface σ, composée de zones $2\pi r\,ds$ revenant environ à $2\pi r\,dy$ (sauf sur une longueur négligeable aux deux bouts) ou produits par $\frac{\pi}{2}$ de leurs projections $4r\,dy$ sur les deux faces d'un

([1]) Leur valeur $V\frac{d\beta}{ds}$ y est, pour $y = 0$, $V\frac{d\beta}{dy}$, c'est-à-dire $V\frac{2a}{\pi b}$, d'après (37) et (39).

plan méridien, vaudra en tout le produit analogue, par $\frac{\pi}{2}$, de la somme de ces projections, c'est-à-dire de 2 fois la *coupe méridienne* πab de l'aiguille. Le trajet L des filets étant $2b$ à très peu près, on aura donc

$$B = \frac{4}{La^2}, \qquad \sigma = \pi^2 ab = \frac{\pi^2}{2} La, \qquad B\sigma^2 = \pi^4 L;$$

et la formule (38), divisée par $\theta_0 \sigma$, donnera

$$(42) \qquad \text{(pour une aiguille)} \quad k = \left(\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\right)\sqrt{\frac{KCV}{L}}.$$

Le coefficient numérique $\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$, égal à 1,1731, excède celui,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284,$$

qui convenait pour un plateau ayant ses faces parallèles au courant général. Donc la convexité de la surface dans le sens perpendiculaire aux filets fluides, tout en paraissant moins influente que suivant le sens même des filets, n'est pas sans effet pour accroître le pouvoir refroidissant. Elle fait, ici, grandir k dans le rapport, $\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,040$, de $\frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$ à $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. C'est ce que montraient déjà les deux exemples comparés de la sphère et du cylindre, où le rapport analogue était notablement plus fort, savoir, celui de $\sqrt{2}$ à $\frac{4}{\pi}$, c'est-à-dire $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1,111$, comme si la courbure propre des filets fluides accroissait l'effet de la convexité de la surface dans le sens transversal.

22. Comparons enfin, aux pouvoirs refroidissants, que nous venons d'évaluer, sur le disque et l'aiguille, d'un courant dirigé suivant leur axe de révolution, ceux qu'exercerait le même courant s'il était perpendiculaire à cet axe.

Alors, sur chacune des deux faces du disque, le courant glisserait, suivant leurs cordes, que j'appellerai $2X$, normales à un même diamètre $2a$ de la face, très sensiblement comme sur un plateau mince de largeur $L = 2X$, c'est-à-dire en donnant lieu à la conductibilité

fictive $k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{L}} = \sqrt{\frac{2KCV}{\pi X}}$; et, si l'on appelle Y la distance au centre, sur le diamètre $2a$, du milieu de la corde $2X$, distance variable de $-a$ à $+a$, la bande élémentaire $2X\,dY$ de chaque face émettra un flux de chaleur exprimé par $\sqrt{\frac{2KCV}{\pi X}}\,\theta_0\,(2X\,dY)$. Donc celui-ci, doublé, puis intégré de $Y = -a$ à $Y = +a$, ou quadruplé et intégré de zéro à a, évaluera le pouvoir refroidissant :

$$(43)\qquad 8\theta_0\sqrt{\frac{2KCV}{\pi}}\int_0^a \sqrt{X}\,dY.$$

Or, si φ désigne, sur chaque face circulaire, l'angle d'un rayon avec le diamètre $2a$, nous aurons

$$Y = a\cos\varphi,\qquad X = a\sin\varphi;$$

d'où

$$dY = -\,a\sin\varphi\,d\varphi;$$

et, en appelant, pour abréger, I l'intégrale

$$(44)\qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi,$$

le nouveau pouvoir refroidissant (43) du courant sur le disque deviendra

$$(45)\qquad 8I\theta_0\sqrt{\frac{2KCVa^3}{\pi}}.$$

D'autre part, remplaçons, dans (38), B par la valeur (39); et nous aurons pour le pouvoir analogue, sur le disque normal au courant.

$$8\theta_0\sqrt{\frac{2KCVa^3}{3}}.$$

Le rapport du nouveau pouvoir refroidissant (45) au premier considéré (38) est donc

$$(46)\qquad \text{(pour le disque)}\quad I\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Passons au cas de l'aiguille. Ici, le courant normal à son axe traitera sensiblement chacune de ses zones $2\pi r\,ds$ ou (à très peu près) $2\pi r\,dy$, comme une bande d'un cylindre circulaire, en y donnant, par conséquent, une conductibilité fictive k égale à $\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\text{KCV}}{\text{L}}}$ ou à $\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\text{KCV}}{\pi r}}$. Il en résulte le flux $\theta_0\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\text{KCV}}{\pi r}}(2\pi r\,dy) = 8\theta_0\sqrt{\frac{\text{KCV}\,r}{\pi}}\,dy$, et, pour toute l'aiguille, en intégrant de $y = -b$ à $y = +b$, ou deux fois de $y = 0$ à $y = b$, $16\theta_0\sqrt{\frac{\text{KCV}}{\pi}}\int_0^b \sqrt{r}\,dy$. Or on a $r = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$; et, si l'on pose $y = b\cos\varphi$ (d'où $r = a\sin\varphi$), cette expression devient, encore par l'introduction de l'intégrale définie (44),

$$(47) \qquad 1,61\,\theta_0\sqrt{\frac{\text{KCV}\,ab^2}{\pi}}.$$

Comparée à la formule (38), dans laquelle B prendra la valeur (41), et qui sera ainsi $8\theta_0\sqrt{\frac{\pi\,\text{KCV}\,a^2 b}{3}}$, elle donne le rapport très grand

$$(48) \qquad \text{(pour l'aiguille)} \quad \frac{2,1}{\pi}\sqrt{\frac{3b}{a}}.$$

On voit que, sur une aiguille assez fine, le courant a, comme on pouvait le prévoir, un pouvoir refroidissant incomparablement plus fort, quand il est perpendiculaire à son axe, que lorsqu'il lui est parallèle.

Par conséquent, *le fait, pour un cylindre elliptique, d'être également refroidi par un courant normal à son axe, dans quelque azimut de sa section que souffle ce courant (n° 14), ne doit pas être généralisé et étendu à un corps quelconque. Le pouvoir refroidissant est augmenté beaucoup par les changements d'orientation du courant qui réduisent notablement le trajet des filets fluides sur le corps* (¹).

(¹) Un exemple, encore plus simple, de cette réduction du pouvoir refroidissant par l'allongement du trajet des filets fluides sur le corps, se présente dans le cas élémentaire où le courant n'est pas troublé par la présence du corps, c'est-à-

Il nous reste à évaluer l'intégrale I, définie par (44). Le procédé usuel qui, dans l'expression $\int \sin^m x\, dx$, permet d'abaisser l'exposant m de deux unités, donne d'abord

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

Substituons à φ un nouvel angle ψ, variable également entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, mais tel, que l'on ait

$$\sin\varphi = \cos^2\psi, \qquad \text{d'où} \qquad d\varphi = -\frac{2\cos\psi\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\cos^4\psi}} = -\frac{2\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{2-\sin^2\psi}}.$$

Il vient alors, vu, finalement, l'expression connue de l'intégrale elliptique complète F_1 de Legendre et la Table numérique des logarithmes décimaux de ses valeurs qu'il a calculée,

$$(49) \qquad I = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\psi}} = \frac{\sqrt{2}}{3} F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,87402.$$

Le rapport (46), relatif au disque, devient alors

$$(50) \qquad \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,8521.$$

Le courant enlève donc au disque, quand il lui est parallèle, les $\frac{8521}{10000}$ de la chaleur qu'il prend lorsqu'il lui est perpendiculaire.

---

dire dans le cas d'un plateau long et mince, d'une largeur donnée l, *tangent au courant, mais dont l'axe ou le bord lui sont obliques* et font avec lui un angle, aigu ou obtus, $\frac{\pi}{2} - i$. Alors le trajet L des filets fluides sur le plateau devient $\frac{l}{\cos i}$, et *la conductibilité superficielle* k représentative du pouvoir refroidissant, savoir $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, devient $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{KCV}{l}\cos i}$: elle *est proportionnelle à la racine carrée du cosinus de l'angle i mesurant l'obliquité du courant sur l'axe du plateau.* Le pouvoir refroidissant décroîtra évidemment dans le même rapport que $\sqrt{\cos i}$, à mesure que grandira l'obliquité i.

§ VI. — Extension des lois précédentes à tout corps convexe.

23. Les formules (26) et (27) s'étendent à un corps convexe quelconque.

Pour définir les filets fluides *voisins de sa surface*, nous considérerons chacun d'eux au point où il coupe une surface $\beta = \text{const.}$ déterminée, dite *surface origine*, celle, par exemple, dont la courbe terminale sur le corps aura la longueur 2π d'une circonférence de rayon 1, ou même, plus généralement, une certaine longueur $2\pi l$: et, $\Delta_1\beta$ prenant, en chaque point de cette courbe, une valeur assignée $(\Delta_1\beta)_0$, nous appellerons, d'une part, $\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}$, la *petite* perpendiculaire abaissée du filet sur le corps, c'est-à-dire sur la courbe terminale $2\pi l$, et, d'autre part, $l\gamma$ l'arc de celle-ci séparant, d'une origine prise arbitrairement sur elle, le pied de la perpendiculaire $\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}$. Il est clair que α, γ *particulariseront* chaque filet; et, si l'on y joint le paramètre β des surfaces d'égal potentiel, variable de $-\infty$ à ∞ le long des filets, on aura trois coordonnées α, β, γ propres à définir tous les points (x, y, z) de l'espace qui entoure le corps.

Observons encore que les surfaces β interrompues par le corps seront comprises entre deux extrêmes β_0, β_1 l'atteignant par un *point conique*, point d'aboutissement sur le corps, pour la première, et de départ du corps, pour la seconde, du *filet central*, qui, entre eux, s'épanouit en une nappe recouvrant toute la surface.

24. Cela posé, concevons le faisceau de filets, contigu au solide, dont la section par la surface origine est un petit rectangle, à côtés $l\,d\gamma$, $\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}$. Un certain feuillet fluide élémentaire coïncide, à l'époque t, avec ce rectangle; et son contour mobile, que l'on sait devoir garder toujours, vu la continuité des déformations, la forme parallélogramme, décrit évidemment, d'un mouvement presque translatoire à chaque instant, les quatre faces du faisceau. Donc celui-ci a pour section droite, sur une surface β quelconque, un parallélogramme ayant comme

hauteur la perpendiculaire, n, abaissée du filet (α, γ) sur le corps, et, comme base, l'écartement ε des deux filets à paramètre α nul et à paramètre γ différant, entre les deux, de $d\gamma$. Or les deux sections normales $n\varepsilon$, $\left(\frac{\alpha}{l(\Delta_1\beta)_0}\right)(l\,d\gamma)$ du faisceau sont réciproquement proportionnelles aux vitesses d'écoulement correspondantes

$$V\Delta_1\beta \quad \text{et} \quad V(\Delta_1\beta)_0,$$

à raison de la conservation du débit des filets, exprimée par l'équation $\Delta_2\beta = 0$. De là résulte, pour apprécier la distance variable n du filet (α, γ) à la surface du corps, la formule

$$(51) \quad n\varepsilon\Delta_1\beta = \alpha\,d\gamma, \qquad \text{ou} \qquad n = \left(\frac{d\gamma}{\varepsilon\Delta_1\beta}\right)\alpha, \qquad \alpha = \left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\Delta_1\beta\right)n.$$

25. En chaque endroit, les *couches* du faisceau *parallèles* à la surface du corps ont, chacune, une certaine température θ, *rapidement variable* d'une couche à l'autre, ou *suivant une même normale n prolongée;* et $\Delta_2\theta$ est sensiblement la dérivée seconde de θ en n, dérivée que l'on pourra, si l'on veut, prendre, sans faire varier non seulement β, mais même γ, c'est-à-dire le long de l'intersection de la surface β par la face $\gamma =$ const. du faisceau (pouvant être devenue oblique au corps), pourvu que dn désigne toujours la distance *normale* des couches. En effet, θ ne varie *rapidement* que de couche en couche, et non d'un point à l'autre de chacune.

Dès lors, le numérateur $d^2\theta$ étant une différentielle partielle *en α seul*, dans cette dérivée seconde de θ, on pourra écrire celle-ci

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dn}\right)^2$$

et y remplacer la dérivée de α en n par sa valeur tirée de la troisième formule (51), linéaire en n, car le coefficient entre parenthèses y sera sensiblement constant. On aura donc

$$(52) \qquad \Delta_2\theta = (\Delta_1\beta)^2\left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\right)^2\frac{d^2\theta}{d\alpha^2}.$$

Telle sera la valeur approchée de $\Delta_2\theta$, à substituer dans la seconde

équation (1) (p. 292). D'autre part, le premier membre de la même équation est le produit, par la vitesse $\Delta_1\beta$ (au facteur V près), de la dérivée de θ suivant le filet (α, γ) lui-même, ou prise, sans faire varier ni α, ni γ, le long d'un chemin, ds, quotient de $d\beta$ par $\Delta_1\beta$. Ainsi ce premier membre s'écrit $(\Delta_1\beta)^2 \frac{d\theta}{d\beta}$; et il suffira, en intégrant depuis $\beta = \beta_0$, de poser

$$(53) \qquad \beta' = \int \left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\right)^2 d\beta$$

(ce qui donne une fonction de β et de γ à calculer au préalable d'après la forme des filets), pour que l'équation obtenue en θ devienne exactement la même que pour un corps de révolution, savoir, (25) (p. 307).

Effectivement, la formule (53) de β' se réduit bien à $\int r^2 d\beta$ pour un corps de révolution. Car, alors, $d\gamma$ désigne l'angle dièdre des deux méridiens voisins, dont l'espacement ε, variable comme la distance r à l'axe, est exprimé par $r\,d\gamma$.

26. On aura, par suite, les formules, analogues à (26),

$$(54) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f\left(\beta' - \frac{CV}{K}\frac{\alpha^2}{2\nu^2}, \gamma\right) e^{-\frac{\nu^2}{2}} d\nu, \\ \left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 &= -2\sqrt{\frac{CV}{\pi K}} \int_0^\infty \frac{df(\beta' - \omega^2, \gamma)}{d\beta'} d\omega. \end{aligned} \right.$$

La fonction $f(\beta', \gamma)$ y désigne encore les températures θ du filet central, c'est-à-dire les valeurs θ_0, censées connues en β' et γ, *entre les limites* zéro et β'_1 (correspondant à β_0 et β_1) *où le filet est épanoui*, mais des valeurs nulles hors de ces limites, où β' ne variera, vu l'évanouissement continu qu'y présente le rapport $\frac{\varepsilon}{d\gamma}$, que pour les valeurs $\pm\infty$ de β, c'est-à-dire aux points, de température θ nulle, infiniment éloignés du corps.

Enfin, le flux de chaleur par unité de temps, à travers un élément plan $\varepsilon\,ds$ de la bande du corps couverte par le faisceau considéré, sera le produit de cet élément par $-K\frac{d\theta}{dn}$ ou $-K\left(\frac{d\theta}{d\alpha}\right)_0 \frac{\varepsilon\,\Delta_1\beta}{d\gamma}$, vu la for-

mule (51), produit égal à $-K\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0\left(\frac{\varepsilon}{d\gamma}\right)^2 d\beta\, d\gamma$ ou à $-K\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_0 d\beta'\, d\gamma$. Pour toute la bande, ce sera l'intégrale en β' de cette expression entre les limites o, β'_1, dont la seconde sera une fonction déterminée de γ. Et il faudra enfin intégrer le résultat, par rapport à γ, de $\gamma = 0$ à $\gamma = 2\pi$, pour avoir la chaleur totale enlevée au corps par le fluide dans l'unité de temps. A raison de la valeur (54) de la dérivée de θ en z, il viendra donc, si l'on suppose finalement θ_0 uniforme :

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{Pouvoir refroidissant}\\ = 2\sqrt{\dfrac{KCV}{\pi}}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\sqrt{\beta'_1}} f(\beta'_1 - \omega^2, \gamma)\, d\omega = 2\theta_0\sqrt{\dfrac{KCV}{\pi}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\beta'_1}\, d\gamma.\end{array}\right.$$

C'est, en définitive, la formule (27) (p. 308), *à cela près que le facteur $\sqrt{\beta'_1}$ s'y trouve remplacé par la moyenne de ses valeurs relatives aux divers filets fluides ruisselant sur le corps.*

J'appellerai $\mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1}$ la moyenne en question, dont le produit par

$$4\theta_0\sqrt{\pi KCV}$$

exprime ainsi le pouvoir refroidissant. Sa formule est, d'après (53), en faisant passer le facteur $d\gamma$ sous le signe $\int$ de la première intégration,

$$(56)\qquad \mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma=0}^{\gamma=2\pi}\sqrt{\int_{\beta_0}^{\beta_1}\varepsilon^2\, d\beta}.$$

Pour tous les corps de même forme et orientés de la même manière dans le courant, cette moyenne est en raison directe de la racine carrée du volume. Il suffit, pour le voir, de choisir sur tous ces corps, comme surfaces β origines, des surfaces homologues, dont les courbes respectives d'interruption par les corps se trouveront divisibles en éléments $l\,d\gamma$ ayant leurs facteurs $d\gamma$ indépendants du rapport de similitude; car, alors, la variable β' définie par (53) aura *trois dimensions*, comme le produit $\varepsilon^2\, d\beta$.

Donc, les lois de proportionnalité énoncées après les formules (27)

et (28) (p. 308), pour les corps de révolution, s'appliquent à un corps quelconque [1].

27. Si l'on multiplie par $4\theta_0\sqrt{\pi KCV}$ la formule (56), il vient, pour le pouvoir refroidissant du courant, l'expression

$$2\theta_0\sqrt{\frac{KCV}{\pi}}\int_{\gamma=0}^{\gamma=2\pi}\sqrt{\int_{\beta_0}^{\beta_1}\varepsilon^2\,d\beta}.$$

Les éléments de cette expression, savoir

$$2\theta_0\sqrt{\frac{KCV}{\pi}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\varepsilon^2\,d\beta},$$

---

[1] J'ai donné une première ébauche de cette théorie, par l'emploi d'une équation binome comme (25) et de son intégrale analogue à (54), aux pages 193 et 194 du tome II de mes leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, etc.* Seulement, j'y supposais *parallèles à la surface du corps les filets fluides voisins.* Or, quelque mince que soit la couche totale, à considérer, de ces filets, leur distance n au corps varie généralement, comme on voit, *dans un rapport notable*, sur les étendues *relativement grandes* où s'exerce leur action; et, par suite, les deux variables t, n introduites, dans la note de la page 194 citée, pour tenir lieu de celles que j'appelle ici β' et α, ne conviennent nullement. La formule (51) montre, en effet, que la constance de n le long d'un même filet y supposerait la proportionnalité *inverse* de ε à $\Delta_1\beta$, c'est-à-dire de l'écart mutuel de deux filets contigus, glissant sur la surface, à leur vitesse d'écoulement $V\Delta_1\beta$. Mais c'est plutôt le contraire qui se réalise, la vitesse $V\Delta_1\beta$ se trouvant nulle au point d'épanouissement du filet fluide central, où ε s'annule encore, et prenant sa valeur maxima sur le contour de la plus forte section du corps normale au courant général, là où l'espacement ε des filets est lui-même le plus grand.

La variable β' qui convient à la question n'est donc pas, comme j'étais conduit à l'admettre, l'arc parcouru s *évalué en temps relatif de parcours*, ainsi qu'il arriverait si ε était en raison inverse de $\Delta_1\beta$. En effet, l'on aurait alors, dans (53), le long d'un même filet, $d\beta'$ proportionnel au quotient de $d\beta$ par $(\Delta_1\beta)^2$ ou de ds par $\Delta_1\beta = \frac{ds}{dt}$, ou, enfin, $d\beta'$ proportionnel à dt et, par suite, β' croissant comme t, qui est le temps, *évalué dans l'hypothèse* $V = 1$, c'est-à-dire en prenant pour unité le temps employé par le courant général à parcourir l'unité de longueur.

représentent la chaleur enlevée au corps, dans l'unité de temps, par les divers filets fluides qui le recouvrent, chacun d'eux effectuant sur lui un certain trajet total L et baignant, vu leur largeur variable mais donnée ε, l'étroite bande $\int \varepsilon\, ds$ ou $\int \varepsilon\, d\mathrm{L}$ de la surface. Appelons, pour fixer les idées, E la valeur moyenne de ε, c'est à-dire la largeur moyenne de la bande, dont l'aire sera dès lors EL; et divisons par θ_0 EL la quantité de chaleur indiquée, afin d'avoir la conductibilité extérieure fictive, k, *représentative du pouvoir refroidissant du filet*, ou *évaluée pour la surface* EL *qu'arrose celui-ci*. D'ailleurs, observons que $d\beta$ équivaut à $(\Delta_1\beta)\,ds$, ou à $(\Delta_1\beta)\,d\mathrm{L}$, et que $\mathrm{V}\Delta_1\beta$ désigne la vitesse d'écoulement le long de $d\mathrm{L}$. Si nous appelons v cette vitesse variable, nous aurons donc $d\beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}\,d\mathrm{L}$; et il viendra la formule assez simple

$$(56\ bis)\qquad k=\sqrt{\frac{4}{\pi}\int_0^{\mathrm{L}}\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}}\right)^2\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}\frac{d\mathrm{L}}{\mathrm{L}}}\sqrt{\frac{\mathrm{KCV}}{\mathrm{L}}}.$$

Le rapport $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}$, nul aux deux extrémités du trajet L où se font l'épanouissement et la reconstitution du filet central, excède assez notablement l'unité vers le milieu du trajet, en raison du rétrécissement qu'apporte le corps aux sections d'écoulement des filets qui l'entourent, et de l'accélération du mouvement qui en résulte. La valeur moyenne de $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}}$ ne doit donc pas différer beaucoup de l'unité [1]. Et, comme,

---

[1] De fait, dans le cas du cylindre, où $\varepsilon = \mathrm{E}$, cette valeur moyenne $\frac{\beta_1-\beta_0}{\mathrm{L}}$ a été, pour une section elliptique (p. 304), $\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}$ et, par conséquent, supérieure à l'unité. L'on conçoit d'ailleurs qu'elle y soit particulièrement forte, le passage du fluide voisin se trouvant plus rétréci ou gêné par un cylindre indéfini en longueur que par un corps limité, où l'écoulement des filets qui contournent le cylindre ne pouvant se faire que par deux côtés, suivant les deux sens perpendiculaires à l'axe, au lieu de se produire librement dans tous les azimuts.

Au contraire, dans le cas de la sphère (p. 310), cette valeur moyenne $\frac{\beta_1-\beta_0}{\mathrm{L}}$ devient $\frac{1}{\mathrm{L}}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}\frac{3}{2}\,dy = \frac{3\mathrm{R}}{\mathrm{L}}$, ou $\frac{3}{\pi}$, et se trouve être un peu moindre que 1. Mais,

d'autre part, le rapport $\frac{\varepsilon}{E}$ a pour valeur moyenne 1, l'on conçoit que la valeur moyenne du produit $\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 \frac{v}{V}$ ne s'écarte pas, non plus, beaucoup de l'unité. Par suite, le coefficient numérique affectant $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, dans l'expression de k qui correspond à un filet fluide quelconque, sera toujours un peu voisin de ce qu'il est quand $v = V$ et $\varepsilon = E$, c'est-à-dire de sa valeur $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ propre au cas d'un mince plateau tangent au courant.

Ainsi s'explique la concordance approximative, signalée au n° **3**, des valeurs de ce coefficient pour un certain nombre de formes du corps.

La valeur générale ou moyenne de la conductibilité fictive k pour tout le corps serait évidemment $\frac{\Sigma k EL}{\Sigma EL}$, les deux signes Σ de sommation

---

par contre, le rapport $\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2$ varie alors beaucoup et, par suite, excède notablement, *en moyenne*, l'unité; car, si l'on pose $\varepsilon = E(1 + \varepsilon')$, où ε' désigne une variation (relative) *nulle en moyenne*, ce rapport sera $1 + 2\varepsilon' + \varepsilon'^2$ et aura visiblement pour valeur moyenne l'unité *accrue de la valeur moyenne positive de* ε'^2. Aussi le coefficient numérique de k est-il encore plus grand pour la sphère que pour le cylindre, même circulaire.

En général, si l'on pose $\varepsilon = E(1 + \varepsilon')$ et $v = V(1 + \delta)$, l'intégrale

$$\int_0^L \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^2 \frac{v}{V} \frac{dL}{L}$$

deviendra, en désignant par le symbole $\mathfrak{M}$ la moyenne de la quantité inscrite à la suite,

$$1 + \mathfrak{M}\,\delta + \mathfrak{M}\,(\varepsilon'^2) + \mathfrak{M}\,(2\varepsilon'\delta) + \mathfrak{M}\,(\varepsilon'^2\delta),$$

expression où non seulement la moyenne de ε'^2, mais celle de $2\varepsilon'\delta$ seront positives, vu que δ aura le signe négatif ou positif de ε' tant aux deux extrémités qu'au milieu du chemin L. Les signes divers de δ devant rendre peu sensible la valeur moyenne du produit *du troisième degré* $\varepsilon'^2\delta$, il ne pourra guère y avoir de négatif que le petit terme $\mathfrak{M}\,\delta$. L'intégrale paraît donc devoir être toujours supérieure à l'unité.

Le coefficient numérique par lequel il faut multiplier $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, pour obtenir k, aurait ainsi comme valeur minimum $\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,1284$.

s'étendant à tous les filets dérivés du filet central ou étalés sur la surface.

§ VII. — Cas de l'ellipsoïde à axes inégaux : application à un disque et à une aiguille elliptiques.

28. L'ellipsoïde semble devoir être l'exemple naturel, ou le plus simple, à donner de la théorie générale précédente. Et, cependant, les calculs y présentent de grandes difficultés, probablement insurmontables quand on veut les pousser jusqu'au bout en y complétant les intégrations (56).

Appelons $2a$, $2b$, $2c$ les trois axes, suivant les sens respectifs des x, y, z.

Nous avons vu déjà au n° **13** (p. 302) que le potentiel $V\beta$ des vitesses comprendrait, à part le facteur V et une constante arbitraire, trois termes, produits respectifs des trois cosinus directeurs l, m, n du courant par trois solutions particulières analogues, dont la première est $x\chi$, avec l'expression (17) de χ et la valeur (18) de la constante A qui y figure.

Pour donner plus de concision et de symétrie aux formules, considérons l'intégrale définie

$$(57) \qquad I = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

où λ, paramètre positif des ellipsoïdes homofocaux extérieurs au proposé, et croissant de zéro à l'infini quand on s'éloigne de celui-ci, est la fonction de x, y, z définie par leur équation commune

$$(58) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

L'intégrale définie figurant dans (17) égale le quotient, par $-a$, de la dérivée de I en a ; et cette expression (17) de χ peut s'écrire

$$1 - \frac{1}{aA}\frac{dI}{da}.$$

La formule générale de β sera donc

$$(59)\quad \beta = lx\left(1 - \frac{1}{aA}\frac{dI}{da}\right) + my\left(1 - \frac{1}{bB}\frac{dI}{db}\right) + nz\left(1 - \frac{1}{cC}\frac{dI}{dc}\right) + \text{const.},$$

où, d'après (18), les constantes A, B, C auront les valeurs respectives

$$(60)\quad (A, B, C) = \frac{2}{abc} + \frac{1}{(a, b, c)}\frac{d}{d(a, b, c)}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

A la surface du corps, où $\lambda = 0$, A, par exemple, se confond avec $\frac{2}{abc} + \frac{1}{a}\frac{dI}{da}$, et $-\frac{1}{aA}\frac{dI}{da}$ prend la valeur $\frac{2}{abcA} - 1$. Il y vient donc

$$(61)\quad \beta = \frac{2}{abc}\left(\frac{lx}{A} + \frac{my}{B} + \frac{nz}{C}\right),$$

expression linéaire en x, y, z; de sorte que, si l'on suppose l'ellipsoïde convenablement placé, *les courbes d'égal potentiel* $V\beta$ *y sont les lignes de niveau et*, par suite, *les filets fluides, celles de plus grande pente* (¹).

(¹) Si, dans le cas du cylindre elliptique, la disparition de c et de z n'avait pas rendu extrêmement simple la formule (20) de β, il y aurait eu lieu d'employer la même méthode. Alors l'intégrale I, où l'on supposerait d'abord très grande, mais égale à une constante assignée M, la limite *supérieure*, serait

$$I = \int_\lambda^M \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}$$
$$= 2\log\left(\sqrt{M+a^2} + \sqrt{M+b^2}\right) - 2\log\left(\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda}\right).$$

Or la somme $\sqrt{M+a^2} + \sqrt{M+b^2}$ s'écrit $\sqrt{M}\left[\left(1+\frac{a^2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{b^2}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ et, développée, pour M très grand, par la formule du binome, elle devient

$$2\sqrt{M}\left(1 + \frac{a^2+b^2}{4M} + \ldots\right).$$

Son logarithme népérien vaut donc $\log(2\sqrt{M}) + \frac{a^2+b^2}{4M} + \ldots$ et tend vers zéro

29. Mais bornons-nous à l'hypothèse d'un courant dirigé suivant un axe, celui des z, par exemple ; ce qui donne β proportionnel à z et, pour lignes de pente, les courbes $y = \nu x^k$, avec ν comme paramètre et k égal au quotient de a^2 par b^2.

L'écart ε des deux lignes à paramètres ν et $\nu + d\nu$, qui se projette en vraie grandeur sur le plan des xy, sera $\sqrt{\dfrac{x^{2k}}{1 + k^2\nu^2 x^{2k-2}}}\,d\nu$; car le paramètre différentiel $\sqrt{\dfrac{d\nu^2}{dx^2} + \dfrac{d\nu^2}{dy^2}}$ de la fonction $\nu = yx^{-k}$ est $\sqrt{\dfrac{x^2 + k^2 y^2}{x^{2k+2}}}$, ou $\sqrt{\dfrac{1 + k^2\nu^2 x^{2k-2}}{x^{2k}}}$, et représente, comme on sait, la dérivée $\dfrac{d\nu}{\varepsilon}$ de ν suivant l'élément ε de chemin.

Cela posé, pour évaluer la moyenne $\mathfrak{M}\sqrt{\beta'_1}$, exprimée par (56) (p. 321), et dont le produit par $4\theta_0\sqrt{\pi}\,\mathrm{KCV}$ vaudra le pouvoir refroidissant du courant sur l'ellipsoïde, essayons d'abord de calculer l'inté-

---

dans sa partie fonction de a, b, à mesure que M grandit. A la limite, il vient

$$\mathrm{I} = \text{const.} - 2\log\left(\sqrt{a^2+\lambda} + \sqrt{b^2+\lambda}\right),$$

expression qui se réduit à

$$\text{const.} - 2\log(a+b), \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 0.$$

On déduirait aisément de là, et des formules analogues à (59), (60), l'expression (20) de β. Par exemple, les valeurs de A, B,

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \frac{2}{ab} + \frac{1}{(a,b)}\frac{d}{d(a,b)}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}},$$

seraient simplement

$$\frac{2}{ab} - \frac{2}{(a+b)(a,b)} = \frac{2(a,b)}{ab(a+b)},$$

quantités proportionnelles à a, b. Par suite, la formule de β sur le cylindre, analogue à (61), savoir,

$$\frac{2}{ab}\left(\frac{lx}{\mathrm{A}} + \frac{my}{\mathrm{B}}\right),$$

devient immédiatement

$$(a+b)\left(\frac{lx}{a} + \frac{my}{b}\right),$$

c'est-à-dire (21).

grale totale $\int \varepsilon^2\,d\beta$, prise le long de la ligne de pente à paramètre ν. Tout étant symétrique de part et d'autre du plan des xy, cette intégrale aura *deux fois* sa valeur entre les limites $z=0$, $z=c$. Pour fixer les idées, nous supposerons x, y, ν positifs, ou la demi-ligne de pente, considérée ainsi, située dans l'angle trièdre des coordonnées positives.

Alors, vu l'expression, $\frac{2z}{abcC}$ + const., de β, où nous remplacerons C par la lettre B, afin d'éviter toute confusion avec la capacité calorifique C, nous aurons à obtenir l'intégrale

$$(62)\qquad \frac{4(d\nu)^2}{abc\mathrm{B}}\int_0^c \frac{x^{2k}\,dz}{1+k^2\nu^2x^{2k-2}}.$$

Or, le long de la ligne de pente en question $y=\nu x^k$, l'équation de l'ellipsoïde devient $\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2+k\nu^2x^{2k}}{a^2}$; et sa différentiation donne

$$dz=-\frac{c}{a}\,\frac{1+k^2\nu^2x^{2k-2}}{\sqrt{a^2-x^2-k\nu^2x^{2k}}}\,x\,dx,$$

valeur qu'on pourra substituer dans (62).

Appelons $\sqrt{\mu}$ l'abscisse x du point où la ligne de pente considérée coupe la section principale $z=0$ de l'ellipsoïde, c'est-à-dire l'ellipse $x^2+ky^2=a^2$, où l'on aura $x^2=\mu$ et $y^2=\nu^2\mu^k$. Il viendra donc, entre μ et ν, l'équation

$$(63)\qquad \mu+k\nu^2\mu^k=a^2;$$

et une transformation immédiate de (62) nous donnera, en posant finalement $x^2=\xi$,

$$(64)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int\varepsilon^2\,d\beta=\frac{4(d\nu)^2}{a^2b\mathrm{B}}\int_0^{\sqrt{\mu}}\frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-k\nu^2x^{2k}}}\\[2ex] \displaystyle\qquad\qquad=\frac{2(d\nu)^2}{a^2b\mathrm{B}}\int_0^{\mu}\frac{\xi^k\,d\xi}{\sqrt{a^2-\xi-k\nu^2\xi^k}},\end{cases}$$

la limite supérieure μ se trouvant déterminée, en fonction de ν, par la relation (63). Mais comme cette relation se résout aisément par rap-

port à ν, il est naturel d'éliminer ν, ou de lui substituer le nouveau paramètre μ, dans l'angle des coordonnées positives où ν croît de zéro à ∞ pendant que μ décroît de a^2 à zéro. Le produit $k\nu^2$ se trouvera ainsi remplacé par $\frac{a^2-\mu}{\mu^k}$ et $d\nu$ par

$$-\frac{\mu+k^2\nu^2\mu^k}{2k\nu\mu^{k+1}}d\mu = -\frac{\mu+k(a^2-\mu)}{2\mu\sqrt{k\mu^k(a^2-\mu)}}d\mu.$$

Posons encore $\xi = \mu\eta$, puis, dans le résultat transformé,

$$(65) \qquad \mu = a^2\sin^2\varphi \quad (\text{d'où } d\mu = 2a^2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi),$$

φ étant un angle auxiliaire, variable de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

Et après avoir substitué, dans (56) (p. 321), la racine carrée de l'intégrale ainsi obtenue pour $\int\varepsilon^2\, d\beta$, observons que les plans des yz et des xz partagent l'ellipsoïde en quatre régions symétriques, dont nous n'aurons compté qu'une : ce qui conduira à multiplier par 4 le résultat de l'intégration finale en φ. Nous aurons enfin

$$(66) \quad 2\pi\sqrt{\beta'_1} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2a}{kbB}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\int_0^1\frac{\eta_1^k\, d\eta_1}{\sqrt{1-\eta_1\sin^2\varphi-\eta_1^k\cos^2\varphi}}}(\sin^2\varphi+k\cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

30. Les intégrations ne paraissent guère effectuables que dans les deux cas de l'ellipsoïde de révolution, où $k=1$, et d'un ellipsoïde infiniment aplati suivant un des deux axes normaux au courant, celui des x, par exemple, où $k=0$.

Si, d'abord, $k=1$, ou que $b=a$, φ s'élimine immédiatement de (66), où l'intégrale placée sous un radical devient $\int_0^1\frac{\eta_1\, d\eta_1}{\sqrt{1-\eta_1}}$, c'est-à-dire $\left[-\frac{2}{3}(2+\eta)\sqrt{1-\eta}\right]_0^1$ ou $\frac{4}{3}$. La valeur de β'_1, ainsi égale à sa moyenne, est $\frac{8}{3B}$, conformément au résultat déjà obtenu au § V (p. 312), avant la formule (38).

Supposons maintenant k infiniment petit, ou l'ellipsoïde réduit soit à un mince plateau elliptique, parallèle au courant et ayant b, c pour demi-axes, soit à une aiguille perpendiculaire au courant et de longueur $2b$,

ayant pour section principale transversale une petite ellipse à axes $2a$, $2c$. L'intégrale placée sous le radical, dans (66), devient $\frac{1}{\sin\varphi}\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta}}$, c'est-à-dire $\frac{2}{\sin\varphi}\left(-\sqrt{1-\eta}\right)_0^1$ ou $\frac{2}{\sin\varphi}$. Et la formule (66) est alors, vu d'abord la valeur $\frac{a^2}{b^2}$ de k, puis, finalement, la définition (44) et la valeur (49) de l'intégrale I considérée au n° **22** (p. 315),

$$(67)\qquad \mathfrak{M}\sqrt{\beta_1} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a\mathrm{B}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{\frac{1}{2}}d\varphi = \frac{4\mathrm{I}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a\mathrm{B}}}.$$

Il ne nous reste donc qu'à évaluer le produit $a\mathrm{B}$. L'expression de B (mise ici pour C) est donnée par une formule, analogue à (18) (p. 302), de laquelle il résulte immédiatement

$$(68)\qquad a\mathrm{B} = \frac{2}{bc} - \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda}}\,\frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

51. Soit, en premier lieu, c comparable à b; ce qui revient à considérer le cas du disque.

La fonction sous le signe $\int$, dans (68), est plus petite que ce qu'elle devient quand on y supprime, au dénominateur, soit a^2, b^2, c^2 devant λ, soit λ devant a^2, b^2, c^2. L'élément de l'intégrale se trouve ainsi moindre que $\frac{a\,d\lambda}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}$, et moindre que $\frac{d\lambda}{bc^3}$. D'où il suit que, si ε désigne une *très petite* quantité positive, indépendante de a, mais d'ailleurs quelconque, d'une part, les éléments correspondant aux valeurs de λ inférieures à ε donnent moins que la somme $\int_0^\varepsilon \frac{d\lambda}{bc^3}$, ou sont insignifiants, et, d'autre part, le reste de l'intégrale est moindre que

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{a\,d\lambda}{\lambda^2\sqrt{\lambda}} = \frac{2a}{3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$$

et s'évanouit avec a. Donc, a tendant ici vers zéro, le dernier terme de

la formule (68) disparaît, et le troisième membre de (67) devient

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\mathrm{I}\sqrt{b^2 c}.$$

Multiplié par $4\theta_0\sqrt{\pi\mathrm{KCV}}$, il donne le pouvoir refroidissant cherché du courant sur le disque elliptique :

(69) (disque elliptique) Pouvoir refroid. $= 8\,\mathrm{I}\,\theta_0\sqrt{\frac{2\,\mathrm{KCV}\,b^2 c}{\pi}}$.

32. Passons enfin au cas d'une aiguille. La petitesse de c n'y rend sensibles, dans le dernier terme de (68), que les éléments correspondant aux valeurs très petites de λ, pour lesquelles le radical $\sqrt{b^2+\lambda}$ est réductible à b. Or ce terme de (68) devient alors (c'est-à-dire sauf erreur relative négligeable), λ désignant toute limite (supérieure) très grande devant a et c,

$$-\frac{a}{b}\int_0^{\lambda}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}(c^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{b(a^2-c^2)}\left(\sqrt{\frac{a^2+\lambda}{c^2+\lambda}}\right)_0^{\lambda}$$
$$= -\frac{2a(a-c)}{bc(a^2-c^2)} = -\frac{2a}{bc(a+c)}.$$

La formule (68) donne donc pour l'inverse de B la valeur $ab\,\frac{a+c}{2}$, et, en multipliant ce que devient alors le dernier membre de (67) par $4\theta_0\sqrt{\pi\mathrm{KCV}}$, on obtient comme pouvoir refroidissant :

(70) (aiguille ellipt.) Pouv. refr. $= 16\,\mathrm{I}\,\theta_0\sqrt{\mathrm{KCV}\frac{a+c}{2\pi}b^2}$.

Les expressions (69) et (70) comprennent bien, comme cas particuliers, celles, (45) et (47), que nous avait données, pour un disque circulaire et une aiguille de révolution, l'assimilation de chaque bande sillonnée par le courant à une bande cylindrique (p. 315 et 316). Il est clair que la même assimilation nous aurait fourni sans difficulté les formules actuelles, plus générales, (69) et (70), dont la seconde se trouverait même ainsi établie, grâce aux formules du n° **14** (p. 303).

pour le cas où le courant, toujours normal à l'aiguille, ferait des angles quelconques avec les axes $2a$, $2c$ de la section transversale. Au reste, cette dernière formule, (70), comprend l'autre, (69), comme on voit en y annulant a [1].

33. On pourrait aussi, dans le cas du disque, en y employant encore la méthode du n° **22** (p. 315), supposer le courant parallèle à un diamètre $2c$ autre qu'un axe ou incliné d'un angle quelconque, U, sur son conjugué $2b$; ce qui introduirait au second membre de (69) le facteur $\sin U$, rapport de l'aire totale σ du disque à $2\pi bc$. Et la division par $\theta_0 \sigma$ donnerait une conductibilité fictive k très simple en fonction du *trajet maximum* $2c$ des filets sur le corps, savoir :

$$k = \frac{41}{\pi}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\text{KCV}}{2c}} = 1,2557\sqrt{\frac{\text{KCV}}{2c}}.$$

---

(1) Ce Mémoire a été résumé dans quatre Notes publiées aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (t. CXXXVIII, 9 et 16 mai 1904, p. 1134 et 1189; t. CXL, 2 et 9 janvier 1905, p. 15 et 65).

M. Alex. Bassetti, ingénieur civil des constructions navales, a fait, d'une formule et de la méthode qu'indiquaient les deux premières Notes, une intéressante application aux *condenseurs à surface*, dans une étude sur le *Calcul rationnel de ces appareils* publiée au *Bulletin de l'Association technique maritime*. Il résulte de cette étude que, sous la réserve d'expériences plus complètes à entreprendre, les solutions suggérées par la théorie paraissent bien d'accord avec celles qu'indique la pratique.

En terminant, complétons la Note des pages 316 et 317, relative au cas d'un plateau long et mince tangent au courant, mais dont le bord lui est incliné d'un angle i. La proportionnalité du pouvoir refroidissant à $\sqrt{\cos i}$ y revient encore à remplacer V par $V\cos i$, ou à ne regarder comme *efficace* que *la composante du courant général* V *normale à l'axe du plateau*. Or, ainsi interprétée, cette proportionnalité s'applique à un long cylindre de forme quelconque, pour lequel, l'axe des z étant choisi suivant les génératrices, on aura toujours, dans les équations (1), (2), (3) du problème (p. 292), $\nu = 0$ et β dépendant de z par le terme unique, linéaire, nz, sans influence sur l'autre partie, fonction de x et de y. Car il suffit de supposer, comme nous le faisons ici, *les températures* θ_0 *et* θ *indépendantes de* z, *pour que la composante* Vn *du courant suivant les génératrices cesse entièrement de figurer dans les équations en* θ *et dans le calcul des flux de chaleur.*

Relations qui existent entre les formes quadratiques de deux déterminants D *et* De^2

(*Disquisitiones*, nos 213 et 214);

PAR LE P. PÉPIN.

---

1. Gauss est souvent difficile à comprendre parce qu'il supprime l'analyse par laquelle il est parvenu aux théorèmes qu'il expose. Cette remarque est particulièrement applicable aux deux articles cités des *Disquisitiones*. Dans ces deux articles, Gauss s'occupe des formes quadratiques renfermées dans d'autres formes quadratiques sans leur être équivalentes. D'après les articles 157 et 158 des *Disquisitiones*, si une forme f du déterminant D en renferme une autre F du déterminant E, le rapport des deux déterminants, E:D, est égal au carré du module $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ de la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ par laquelle la forme f se change en E. Si $\alpha\delta - \beta\gamma$ était égal à ± 1, la forme f serait aussi renfermée dans F, les deux formes seraient équivalentes. Gauss suppose $\alpha\delta - \beta\gamma = e$, $e^2 > 1$.

L'avantage de l'étude présente serait de déduire de la classification des formes de déterminant D celle des formes de déterminant De^2; mais, pour cela, il faudrait démontrer que toute forme du déterminant De^2 est renfermée dans quelque forme du déterminant D. C'est ce que Gauss ne fait pas ici; il avertit lui-même qu'il ne considère que les formes du déterminant De^2 renfermées dans des formes du déterminant D. Il considère deux formes f, F, la première, du détermi-

nant D, la seconde, du déterminant De^2; il suppose que f renferme F et se transforme en F par la substitution propre α, β, γ, δ dont le module est égal à e.

La généralité avec laquelle le sujet est envisagé par Gauss a l'inconvénient d'exiger beaucoup de calculs de peu d'intérêt; car ce qui peut être utile dans une classification des formes du déterminant De^2, c'est l'ordre primitif. Ce problème est résolu dans la partie des *Disquisitiones* consacrée à la théorie de la composition des formes quadratiques; Gauss déduit la classification de l'ordre primitif du déterminant De^2 de celle de l'ordre primitif du déterminant D, en prenant pour intermédiaire l'ordre dérivé du déterminant De^2, obtenu en multipliant par e les éléments des formes primitives qui représentent les diverses classes primitives du déterminant D. C'est probablement pour cette raison que Gauss, en envisageant ici son sujet dans toute sa généralité, s'est contenté de donner les éléments de la solution de son problème avec une concision qui en rend l'intelligence difficile; d'autant plus qu'une erreur qu'on rencontre dans les lignes 3 et 4 de la page 209 (édition 1870) est propre à désorienter le lecteur.

Quelle que soit la raison de la concision de Gauss, son travail porte l'empreinte de son génie; il mérite d'être développé.

2. Supposons qu'une forme $F = (A, B, C)$ du déterminant De^2 soit renfermée dans une forme $f = (a, b, c)$ du déterminant D, et désignons par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la substitution propre qui transforme f en F. On aura

$$(1)\qquad A = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \qquad C = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

$$(2)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = e, \qquad B^2 - AC = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = De^2.$$

Désignons par m, m', m'', ... les diviseurs positifs de e, y compris 1 et e; posons $e = mn = m'n' = m''n'' = \ldots$. Pour chacune des décompositions $e = mn$ déduisons de f les m formes qui s'en déduisent par les substitutions $(m, k, 0, n)$, où k désigne l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$. Pour abréger, nous désignerons ces m formes par $(m; 0)$, $(m; 1)$, ..., $(m; k)$, ..., $(m; m-1)$.

La décomposition $e = m'n'$ donne de même m' formes déduites

de f par les m' substitutions représentées par la formule $(m', k, 0, n')$ où $k = 0, 1, 2, \ldots, m'-1$. Gauss représente par $(m'; k)$ la forme déduite de f par la substitution $(m', k, 0, n')$. De même $(m''; 0)$, $(m''; 1)$, ... désigneront les m'' formes déduites de f par les substitutions $(m'', 0, 0, n'')$, $(m'', 1, 0, n'')$, ..., et ainsi de suite pour m''', m^{IV}, ... Ainsi chaque forme f du déterminant D renferme proprement des formes du déterminant De^2 dont le nombre sera égal à la somme $m + m' + m'' + \ldots$ des diviseurs positifs de e. Nous désignons par Ω l'ensemble de ces formes.

Toutes les formes du groupe Ω sont différentes entre elles; mais elles n'appartiennent pas toujours à des classes différentes.

3. Pour reconnaître si la forme F est renfermée dans f, Gauss compare F avec les formes du groupe Ω pour trouver celles de ces formes qui lui sont proprement équivalentes. Cela suppose que, si F est renfermée dans f, une ou plusieurs des formes du groupe Ω lui sont équivalentes. Pour le démontrer, désignons par $S = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la transformation supposée de f en F et par $T = (f, g, f', h)$ une substitution unimodulaire, dont nous déterminerons les éléments de telle sorte que la substitution composée (ST) présente la forme $(m, k, 0, n)$, m et n étant les deux facteurs d'une décomposition $e = mn$ et k un nombre positif compris entre les limites 0, $m-1$. On a

$$(\mathrm{ST}) = \alpha f + \beta f',\ \alpha g + \beta h,\ \gamma f + \delta f',\ \gamma g + \delta h.$$

Pour donner à cette substitution la forme demandée, il faut d'abord résoudre l'équation $\gamma f + \delta f' = 0$ en tenant compte de l'équation

$$fh - f'g = 1, \tag{3}$$

que doivent vérifier les éléments de la substitution T. Les deux nombres f, f' étant premiers entre eux, f ne peut diviser le produit $\delta f'$ sans diviser δ. Posant donc $\delta = fn$, l'équation à résoudre divisée par f devient $\gamma + nf' = 0$. On prendra $f = \frac{\delta}{n}$, $f' = -\frac{\gamma}{n}$; d'où

$$\alpha f + \beta f' = \alpha \frac{\delta}{n} - \beta \frac{\gamma}{n} = \frac{e}{n} = m,$$

en vertu de l'équation (2). Les deux nombres f, f' étant premiers entre eux, n est le plus grand commun diviseur de γ et de δ. La résultante (ST) deviendra

$$(ST) = m,\ \alpha g + \beta h,\ 0,\ n$$

en posant

(4) $$\gamma g + \delta h = n, \qquad \frac{\gamma}{n} g + \frac{\delta}{n} h = 1.$$

Les solutions de cette équation en nombres entiers se déduisent de l'une d'elles g_0, h_0 par les formules

(5) $$g = g_0 - \frac{\delta}{n} z, \qquad h = h_0 + \frac{\gamma}{n} z.$$

Le deuxième élément de (ST) prendra une valeur k comprise dans les limites 0 et $m-1$, pourvu qu'on donne à z une valeur convenable, ce qui est possible, mais d'une seule manière. On a, en effet,

$$\alpha g + \beta h = \alpha g_0 + \beta h_0 - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{n} z = \alpha g_0 + \beta h_0 - m z.$$

Pour que cette expression ait une valeur positive comprise dans les limites 0 et $m-1$, il faut que z vérifie la double inégalité

$$0 \leqq \alpha g_0 + \beta h_0 - m z < m;$$

c'est ce qu'on obtient en désignant par k le résidu minimum positif de $\alpha g_0 + \beta h_0 \pmod{m}$ et en prenant

(6) $$z = \frac{\alpha g_0 + \beta h_0 - k}{m}.$$

La substitution devient alors $T = \frac{\delta}{n},\ g_0 - \frac{\delta}{n} z,\ -\frac{\gamma}{n},\ h_0 + \frac{\gamma}{n} z.$

La substitution inverse

$$T' = h_0 + \frac{\gamma}{n} z,\ -g_0 + \frac{\delta}{n} z,\ \frac{\gamma}{n},\ \frac{\delta}{n}$$

transformera $(m; k)$ en F. En effet, S transforme f en F, T change F

en la forme proprement équivalente $(m; k)$; la résultante (ST) transforme f en $(m; k)$. Ainsi la forme $(m; k)$ en laquelle se change la forme F par la substitution unimodulaire T est bien une forme du groupe Ω. Donc :

Théorème. — *Si une forme* F *du déterminant* De^2 *est renfermée dans une forme* f *du déterminant* D, *elle est proprement équivalente à quelque forme du groupe* Ω.

4. Pour reconnaître si la forme F est renfermée dans f, il suffit de comparer la forme F avec les formes du groupe Ω; si aucune forme de ce groupe n'est proprement équivalente à F, la forme f ne contient pas F; si plusieurs formes Φ, Φ′, Φ″, ... du groupe Ω sont équivalentes à la forme F, la forme f renferme F et chacune des formes Φ, Φ′, ... fournit, au moyen des formules précédentes, quelque transformation de f en F. En effet, l'analyse par laquelle on reconnaît l'équivalence des deux formes F et Φ fournit le moyen de calculer les éléments de la transformation T′ de Φ en F; d'ailleurs, la construction du groupe Ω fait connaître la substitution $(m, k, 0, n)$ par laquelle la forme Φ se déduit de f, c'est-à-dire la résultante (ST). En composant (ST) avec T′ on trouve (ST)T′ = S, car dans le produit STT′ on peut remplacer deux substitutions consécutives par leur produit, pourvu qu'on ne change pas l'ordre des substitutions. D'ailleurs on peut vérifier directement, à l'exemple de Gauss, que la résultante (ST)T′, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} m, & k \\ 0, & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_0 + \frac{\gamma}{n} z, & -g_0 + \frac{\delta}{n} z \\ \frac{\gamma}{n}, & \frac{\delta}{n} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} m\left(h_0 + \frac{\gamma}{n} z\right) + k\frac{\gamma}{n}, & -mg_0 + m\frac{\delta}{n} z + k\frac{\delta}{n} \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix},$$

est identiquement la substitution $S = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ par laquelle f se change en F. Nous avons déjà les deux derniers éléments γ, δ; il nous suffit de démontrer que les deux premiers éléments s'identifient

avec α, β respectivement, en vertu des équations précédentes (2), (3), (4) et (6). Nous entrerons dans le détail du calcul pour le premier élément seulement. On a

$$m\frac{\gamma}{n}z + mh_0 + k\frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma}{n}(\alpha g_0 + \beta h_0 - k) + k\frac{\gamma}{n} + mh_0$$
$$= \frac{\alpha\gamma g_0 + \gamma\beta h_0}{n} + mh_0;$$

remplaçant $\beta\gamma$ par $\alpha\delta - mn$, la dernière expression devient

$$\frac{\alpha(\gamma g_0 + \delta h_0)}{n} = \alpha.$$

On démontre de même que le second coefficient se réduit à β, en vertu des équations précédentes; il faut pour cela substituer l'expression (6) de z et remplacer $\alpha\delta$ par $\beta\gamma + mn$.

5. Notre analyse prépare la solution du problème dont Gauss s'occupe dans l'article 214.

Problème. — *Deux formes étant proposées, f de déterminant* D *et* F *de déterminant* $\mathrm{D}e^2$, *dont la première renferme proprement la seconde, on demande toutes les transformations de f en* F.

Solution. — Continuant à désigner par Ω le groupe des formes déduites de f par les substitutions $(m, k, 0, n)$, il faut commencer par tirer du groupe Ω les formes auxquelles F est proprement équivalente. Soient Φ, Φ', Φ'', ..., ces formes. Chacune d'elles donnera des transformations propres de f en F; aucune des transformations de f en F n'est donnée par deux formes différentes du groupe Ω; toutes les transformations propres de f en F se déduisent des formes de ce groupe. Comme la méthode est la même pour toutes les formes Φ, nous ne parlerons que d'une seule.

La construction du groupe Ω fait connaître la substitution

$$(m, k, 0, n)$$

par laquelle f se change en Φ. Cette substitution est la résultante des

deux substitutions S, T dont la première change f en F et la seconde F en la forme $(m; k)$ désignée par Φ. Les composantes S, T ne sont pas connues; mais T et T′ son inverse s'obtiennent facilement par la méthode qui fait reconnaître l'équivalence des deux formes F et Φ en les ramenant l'une et l'autre à une même forme par une suite de formes contiguës. On déduit de là, soit la transformation T de F en Φ, soit la transformation inverse T′ de Φ en F. Désignons par a, b, c, d cette transformation. Nous obtiendrons la transformation $S = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de f en F en composant $(ST) = (m, k, 0, n)$ avec la substitution T′, car $(ST)T' = S(TT') = S$. On trouve ainsi

$$S = (ST)T' = \begin{vmatrix} m, & k \\ 0, & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} = ma + kc,\quad mb + kd,\quad nc,\quad nd.$$

Or la substitution T′ étant unimodulaire, c et d sont premiers entre eux ainsi que a et b. On aura

$$(1)\qquad \alpha = ma + kc,\qquad \beta = mb + kd,\qquad \gamma = nc,\qquad \delta = nd.$$

Le nombre n sera le plus grand commun diviseur de γ et de δ, car, la substitution $T' = \left(a, b, \frac{\gamma}{n}, \frac{\delta}{n}\right)$ étant unimodulaire, on a

$$(2)\qquad \frac{a\delta - b\gamma}{n} = 1.$$

Le déterminant de la résultante S est, en vertu des équations (1) et (2),

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \left(ma + k\frac{\gamma}{n}\right)\delta - \left(mb + k\frac{\delta}{n}\right)\gamma = m\left(\frac{a\delta - b\gamma}{n}\right) = mn,$$

$$(3)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = mn = e.$$

Enfin, en éliminant m entre les deux premières équations (1), on trouve

$$(4)\qquad a\beta - b\alpha = k.$$

ERRATUM : *Disq.*, page 209, lignes 3, 4, *au lieu de* : f transibit in Φ, *lisez* : f transibit in F.

L'équation (2) est toujours résoluble en nombres entiers, puisque $\frac{\delta}{n}$ et $\frac{\gamma}{n}$ sont premiers entre eux. Pour faire accorder nos notations avec celles de Gauss, désignons par $a = h$, $b = -g$ une première solution. Les autres solutions seront $a = h + \frac{\gamma}{n}z$, $b = -g + \frac{\delta}{n}z$, de sorte que l'équation (4) devient

$$k = \beta h + \alpha g - \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{n}\right) z = \beta h + \alpha g - mz.$$

Cette formule donne une infinité de valeurs de k; mais une seule de ces valeurs est comprise entre les limites 0 et $m-1$, savoir celle qu'on obtient en prenant pour k le résidu minimum positif de

$$(\alpha g + \beta h) \qquad (\operatorname{mod} m),$$

ce qui donne pour z la valeur évidemment entière

$$z = \frac{\alpha g + \beta h - k}{m}.$$

Sans entrer dans de plus amples détails qui nous amèneraient à répéter ce qui a été dit plus haut, nous concluons en disant que :

Théorème. — *Toute transformation propre de* Φ *en* F *détermine une transformation propre* α, β, γ, δ *de* f *en* F, *que l'on obtient par la méthode que nous venons d'exposer.*

6. Pour compléter la solution du problème proposé, nous démontrerons que toutes les transformations obtenues sont différentes entre elles; on voit immédiatement que deux transformations différentes de $(m; k)$ en F ne peuvent pas donner la même transformation α, β, γ, δ, car les formules (1) sont linéaires. Nous nous bornons à démontrer que deux formes différentes $\Phi = (m; k)$, $\Phi' = (m'; k')$ ne peuvent pas donner la même transformation α, β, γ, δ. Soit, en effet,

(1) $$\alpha = ma + kc = m'a' + k'c',$$

(2) $$\beta = mb + kd = m'b' + k'd',$$

et

(3) $\gamma = \quad nc \quad = n'c',$

(4) $\delta = \quad nd \quad = n'd',$

(5) $ad - bc = 1, \qquad a'd' - b'c' = 1.$

Des équations (4) et (3) multipliées respectivement par a et par b on déduit par soustraction, en ayant égard à l'équation (5),

$$a(nd - n'd') - b(nc - n'c') = n - n'(ad' - bc') = 0;$$

des mêmes équations, multipliées respectivement par a', b', on déduit

$$a'(n'd' - nd) - b'(n'c' - nc) = n' - n(a'd - b'c) = 0.$$

Le nombre n est donc divisible par n' et n' par n; comme ces deux nombres sont positifs, on a nécessairement $n = n'$, $m = m'$ et, par conséquent, les équations (3) et (4) donnent $c = c'$, $d = d'$. Les équations (1) et (2) deviennent

$$ma + kc = ma' + k'c, \qquad mb + kd = mb' + k'd.$$

En les combinant par soustraction après avoir multiplié la première par b et la seconde par a, on trouve

$$k(bc - ad) = m(a'b - b'a) + k'(bc - ad),$$
$$k' - k = m(a'b - b'a),$$

ce qui est impossible, parce que k et k' étant compris l'un et l'autre dans les limites 0 et $m - 1$, il est impossible que $k' - k$ soit divisible par m sans que l'on ait $k = k'$ et par conséquent $\Phi = \Phi'$, contrairement à l'hypothèse. Donc la même transformation de f en F ne peut pas correspondre à deux traisformations de deux formes différentes Φ, Φ' en F.

On ne peut supposer non plus que la même transformation de f en F corresponde à deux transformations différentes d'une même forme $(m; k)$ en F, car si l'on fait $m' = m$, $k' = k$, $n' = n$ dans les formules (1), (2), (3), (4), les formules (3), (4) donnent immédia-

tement $c = c'$, $d = d$; les équations (1) et (2) deviennent alors $ma = ma'$, $mb = mb'$, de sorte que les deux transformations supposées se réduisent à une seule.

Il résulte de là qu'une même forme $\Phi = (m; k)$ donne autant de transformations différentes de f en F qu'il y a de transformations de Φ en F. Si D est négatif, on peut trouver par la méthode générale toutes les transformations de $(m; k)$ en F, de sorte que la méthode précédente fera connaître toutes les transformations possibles de f en F.

Si, au contraire, D est positif non carré, le nombre des transformations de Φ en F est infini; mais on peut les exprimer en un nombre fini de formules au moyen des solutions de l'équation

$$T^2 - De^2 u^2 = 1.$$

Enfin, si la forme F est improprement renfermée dans f, on cherchera par la méthode précédente toutes les transformations propres de f en la forme F' opposée à la forme F; ces transformations, que nous désignons indéfiniment par α, β, γ, δ, seront les transformations impropres de f en F; les transformations propres seront α, $-\beta$, γ, $-\delta$.

7. *Exemple.* — On demande toutes les transformations de (2, 5, 7) en (275, 0, −1) qu'elle renferme tant proprement qu'improprement. On a $D = 4$ et $e = 5$, de sorte que le groupe Ω se compose de six formes, savoir (1; 0), (5; 0), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), qui par le développement deviennent

$$(2, 25, 175), \quad (50, 25, 7), \quad (50, 35, 19), \quad (50, 45, 35),$$
$$(50, 55, 55), \quad (50, 65, 79).$$

Pour reconnaître l'équivalence de deux formes indéfinies, il convient de calculer la période des formes contiguës fournie par l'une d'elles pour reconnaître plus aisément la forme périodique à laquelle on peut les ramener l'une et l'autre pour trouver une transformation de l'une en l'autre.

La forme F étant propre, il n'y a pas lieu de la comparer avec les

deux formes impropres (50, 45, 35), (50, 55, 55). Il suffit donc de considérer les quatre autres formes. Pour reconnaître celles qui sont équivalentes à la forme F, nous formerons la période de la forme $(-1, 0, 275)$ en développant $\sqrt{275}$ en fraction continue.

$$\sqrt{275} = 16 + \quad \text{transformées de Lagrange,}$$

$$\frac{16+\sqrt{275}}{19} = 1 + \qquad (19, -16, -1),$$

$$\frac{3+\sqrt{275}}{14} = 1 + \qquad (-14, 3, 19),$$

$$\frac{11+\sqrt{275}}{11} = 2 + \qquad (11, -11, -14),$$

$$\frac{11+\sqrt{275}}{14} = 1 + \qquad (-14, 11, 11),$$

$$\frac{3+\sqrt{275}}{19} = 1 + \qquad (19, -3, -14),$$

$$\frac{16+\sqrt{275}}{12} = 2 + \qquad (-1, 16, 19),$$

$$\frac{16+\sqrt{275}}{19} = 1 + \qquad (+19, -16, -1).$$

. . . .

La période des quotients se compose de 6 termes, on a

$$\sqrt{275} = 16(1, 1, 2, 1, 1, 32).$$

La période des transformées correspondantes est

$$(19, -16, -1), \quad (-14, 3, 19), \quad (11, -11, -14),$$
$$(-14, 11, 11), \quad (19, -3, -14), \quad (-1, 16, 19).$$

La forme

$$(5; 1) = (50, 35, 19)$$

est contiguë à la forme

$$(19, -16, -1),$$

laquelle est elle-même contiguë à la forme

$$(-1, 0, 275) = F'.$$

La forme (5; 1) se transforme en F′ par la substitution

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1, & -16 \\ 1, & 15 \end{vmatrix}$$

et en la forme F par la substitution composée

$$\begin{vmatrix} -1, & -16 \\ 1, & 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16, & 1 \\ 15, & -1 \end{vmatrix}.$$

En composant la substitution (ST) = (5, 1, 0, 1) qui transforme f en $\Phi = (5; 1)$ avec $T' = (-16, 1, 15, -1)$ qui change (5; 1) en F, on obtient une transformation de f en F, savoir $(-65, 4, 15, -1)$; nous en déduirons les transformations semblables de f en F déterminées par la forme (5; 1), en composant la forme S avec l'expression générale des transformations propres de F en elle-même, savoir

$$(t, u, 275u, t),$$

où t, u expriment indéfiniment toutes les solutions entières de l'équation $t^2 - 275u^2 = 1$. On trouve ainsi

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = -65t + 1100u, \qquad \beta = 4t - 65u, \qquad \gamma = 15t - 275u, \\ \delta = -t + 15u. \end{cases}$$

On fait coïncider ces formules avec celles de Gauss en remplaçant t, u par $-t$, $-u$.

On procède d'une manière semblable pour obtenir les transformations de f en F déterminées par la forme (5; 4), c'est-à-dire

$$(50, 65, 79).$$

On reconnaît d'abord l'équivalence des deux formes (5; 1) et F en les

ramenant l'une et l'autre à une même transformée périodique

$$(-1, 14, 79),$$

ce qui permet de former la suite de formes contiguës par laquelle on obtient la transformation de $(5; 4)$ en F. On trouve

$$(50, 65, 79)(79, 14, -1)(-1, 0, 275)(275, 0, -1).$$

La première forme se change en la dernière par la substitution composée

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & -14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14, & +1 \\ -15, & -1 \end{vmatrix}.$$

En composant $(ST) = (5, 4, 0, 1)$ avec $T' = (14, 1, -15, -1)$ on trouve

$$S = (10, 1, -15, -1)$$

qui transforme f en F. On obtiendra l'expression générale des transformations de f en F en composant la transformation obtenue S avec $(t, u, 275u, t)$ qui transforme F en elle-même. On trouve ainsi

$$(10t + 275u,\ t + 10u,\ -15t + 275u,\ -t - 15u).$$

Ainsi toutes les transformations propres de f en F, déduites de la formule $\Phi' = (50, 65, 79)$, sont exprimées par les formules

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \alpha = 10t + 275u, & \beta = t + 10u, \quad \gamma = -15t - 275u, \\ & \delta = -t - 15u. \end{cases}$$

On reconnaît aisément qu'aucune des formes $(5, 2)$, $(5, 3)$ n'est équivalente à F. Par conséquent, toutes les transformations propres de f en F sont exprimées par les formules (I) et (II), t et u désignant indéfiniment toutes les solutions entières, positives ou négatives, de l'équation

$$t^2 - 275u^2 = 1.$$

Les transformations impropres de f en F s'obtiennent en remplaçant β, δ par $-\beta$, $-\delta$ dans les formules (I) et (II).

8. Pour compléter la solution précédente nous calculerons l'expression générale des solutions de la dernière équation. Nous avons trouvé que la racine carrée de 275 est exprimée par la fraction continue 16(1, 1, 2, 1, 1, 32), où les quotients entiers renfermés entre parenthèses se répètent indéfiniment dans le même ordre. Les moindres nombres positifs qui satisfont à l'équation pellienne sont les deux termes de la réduite obtenue au moyen des quotients qui précèdent le dernier quotient de la première période :

Quotients....	»,	16,	1,	1,	2,	1,	1
Réduites.....	$\frac{1}{0}$,	$\frac{16}{1}$,	$\frac{17}{1}$,	$\frac{33}{2}$,	$\frac{83}{5}$,	$\frac{116}{7}$,	$\frac{199}{12}$

Les moindres nombres qui vérifient l'équation de Pell sont $t = 199$, $u = 12$. Les autres solutions s'en déduisent par la formule

$$\pm t \pm \sqrt{275}\,u = (199 + 12\sqrt{275})^n,$$

en donnant à n toutes les valeurs entières et positives de 1 à ∞; ou bien

$$\pm t \pm 5u\sqrt{11} = (199 + 60\sqrt{11})^n.$$

La note mise au bas de la page 211 dit que toutes les transformations propres de f en F sont exprimées plus simplement par la formule

$$\text{(II')} \qquad 10t + 55u, \qquad t + 2u, \qquad -15t - 55u, \qquad -t - 3u,$$

où l'on désigne par t, u tous les nombres entiers qui vérifient l'équation $t^2 - 11u^2 = 1$. Or les moindres nombres positifs qui vérifient cette équation sont $t = 10$, $u = 3$; les nombres t, u s'obtiennent en donnant à n les valeurs entières $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et en prenant pour chaque valeur de n les quatre combinaisons de signes que comporte la formule

$$\pm t \pm u\sqrt{11} = (10 + 3\sqrt{11})^n.$$

Les valeurs paires de n déterminent les transformations exprimées par les formules (II), tandis que les valeurs impaires donnent celles qui sont exprimées par les formules (I).

Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz;

PAR M. JOUGUET.

Avant-propos.

Les recherches de Riemann et Hugoniot sur la propagation des ondes ont été complétées, dans ces dernières années, par d'importants travaux. Nous ne prétendons rien ajouter aux publications mathématiques parues sur ce sujet. Nous voudrions simplement montrer jusqu'à quel point il nous semble qu'on peut, dès à présent, en tirer parti dans l'étude des phénomènes explosifs. Ce n'est pas là d'ailleurs un problème nouveau et nous consacrerons précisément une partie importante de ce Mémoire à la coordination des résultats déjà obtenus sur cette question.

Avant tout, rappelons brièvement ce qu'apprend l'expérience. Depuis longtemps l'étude des poudres et explosifs solides a mis en évidence deux modes de propagation pour une réaction chimique, d'où la distinction entre les explosions du premier et du deuxième ordre (Roux et Sarrau), ou encore entre la combustion et la détonation. La question s'est beaucoup éclaircie quand elle a été abordée à propos des systèmes gazeux. Les premières recherches sur ces systèmes, celles de Davy, Bunsen, Schlœsing et de Mondésir, Mallard, Fonseca, Gouy, ont porté uniquement, comme on s'en rend compte aujourd'hui.

sur la vitesse de ce que Sarrau appellerait l'*explosion du premier ordre*. La distinction précise, pour les gaz, entre les deux régimes de propagation est due aux travaux de MM. Mallard et Le Chatelier ([1]) et surtout à ceux de MM. Berthelot et Vieille ([2]). Ces derniers savants ont fait la découverte capitale, l'une des plus belles de la Mécanique chimique, du phénomène de l'*onde explosive* dans lequel une réaction se propage dans un mélange gazeux avec une vitesse *régulière* de plusieurs milliers de mètres par seconde. MM. Mallard et Le Chatelier se sont attachés surtout, au contraire, au cas où la flamme, en avançant, parcourt en une seconde quelques mètres seulement; ils ont mis en évidence l'existence d'un régime bien régulier, caractérisé par une vitesse uniforme et assez faible; ils ont étudié, après MM. Schlœsing et de Mondésir, les perturbations que ce régime subit du fait de certaines circonstances, comme l'agitation du mélange, et montré que ces perturbations se produisent spontanément après un petit parcours de la flamme. D'ailleurs, les deux régimes ainsi définis par MM. Berthelot et Vieille d'une part, par MM. Mallard et Le Chatelier de l'autre, ne sont que des cas extrêmes entre lesquels les mêmes savants ont observé toutes sortes d'intermédiaires.

Les expériences de MM. Berthelot et Vieille ont été reprises par M. Dixon dans un travail très important où il a apporté quelques corrections aux chiffres obtenus par ses prédécesseurs ([3]). Plus récemment enfin, MM. Berthelot et Le Chatelier ([4]), puis M. Le Chatelier seul ([5]), ont appliqué à l'étude de l'onde explosive une méthode

---

([1]) Mallard et Le Chatelier, *Recherches sur la combustion des mélanges gazeux explosifs* (*Annales des Mines*, 8e série, t. IV, 1883).

([2]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, 1881, p. 18; t. XCIV, 1882, p. 101, 149, 822; t. XCV, 1882, p. 151, 199. — *Voir* aussi Berthelot, *Sur la force des matières explosives*, t. I, 1883, p. 133.

([3]) Harold Dixon, *Bakerian lecture : The rate of explosion in gases* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A., Vol. CLXXXIV, 1893, p. 97).

([4]) Berthelot et Le Chatelier, *Sur la vitesse de détonation de l'acétylène* (*Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. XX, 1900, p. 15).

([5]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, 1900, p. 1755; t. CXXXI, 1900, p. 30.

photographique qui n'a pas peu contribué à éclaircir les circonstances de la formation de cette onde et même à la définir avec précision.

De tous ces travaux, l'idée s'est peu à peu dégagée — elle est très nettement exprimée, par exemple, par MM. Mallard et Le Chatelier ([1]) — que, dans le régime de propagation lente, celle-ci se fait par conductibilité calorifique, la combustion en un point échauffant et enflammant le mélange aux points voisins, tandis que, dans l'onde explosive, elle se fait par compression mécanique, la conductibilité jouant un rôle faible sinon nul. Une étude complète de la propagation des réactions chimiques devrait donc faire intervenir la théorie de la conductibilité. Malheureusement une telle intervention complique beaucoup les problèmes; nous essaierons bien d'y avoir recours, mais nous serons obligés de nous borner, sur ce point, à des indications assez vagues. Nous examinerons surtout les cas où la conductibilité est négligeable et notre but principal sera l'explication de l'*onde explosive;* nous exposerons les tentatives déjà faites pour interpréter ce phénomène et nous chercherons s'il n'y a pas lieu de les compléter ou même de les modifier.

Nous ne nous occuperons d'ailleurs que des corps gazeux.

Mettons à part l'interprétation donnée par MM. Berthelot et Vieille pour l'onde explosive ([2]), qui fait intervenir la théorie cinétique des gaz; mettons à part aussi tout ce qu'on a dit sur la théorie de la propagation par conductibilité, qui se réduit à de très brèves remarques de MM. Mallard et Le Chatelier ([3]). Cette réserve faite, on peut dire que les travaux des mathématiciens sur la propagation des ondes dans un gaz qui n'est le siège d'aucune réaction chimique ont toujours été jusqu'à présent le guide suivi par ceux qui se sont occupés de notre sujet au point de vue théorique. Il est bien évident qu'on ne saurait mieux faire que de persévérer dans cette voie.

On sait que les ondes se divisent en deux grandes catégories, ondes

---

([1]) MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 341 et suiv.

([2]) BERTHELOT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIII, 1881, p. 18. — BERTHELOT et VIEILLE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCV, 1882, p. 151.

([3]) MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 343.

de choc et ondes ordinaires, suivant qu'il se présente, sur leur front, une discontinuité dans la vitesse ou dans les accélérations des divers ordres. Les mathématiciens ont d'abord étudié les ondes ordinaires : Laplace et surtout Poisson ont traité de la propagation *des petits mouvements* dans les gaz et constitué ainsi la théorie du son ([1]). Quant aux ondes de choc, elles ont été découvertes par Riemann en 1860 ([2]). Les travaux d'Hugoniot ont fait faire à la connaissance de l'un et de l'autre cas des pas considérables ([3]). Outre l'importante notion de compatibilité qu'ils ont introduite dans la Science, on leur doit les deux résultats suivants. Dans le problème des ondes de choc, ils ont fait voir que la relation supplémentaire relative aux mouvements adiabatiques doit être prise sous une forme particulière, toute différente de la forme classique. En ce qui concerne les ondes ordinaires, ils nous ont appris à calculer leur vitesse quelle que soit l'amplitude de l'ébranlement qu'elles propagent et nous ont montré que cette vitesse est toujours donnée, si le mouvement est adiabatique, par la formule de Laplace relative au son ; on comprend tout de suite l'importance d'un tel résultat pour la théorie des explosions et quel progrès à ce point de vue a marqué la substitution de la méthode d'Hugoniot à celle des petits mouvements.

La formule de Laplace montre que la vitesse du son peut atteindre des valeurs très considérables quand la propagation se fait dans un milieu à très haute température. Dès 1883, MM. Mallard et Le Chatelier ont entrevu dans cette remarque une interprétation de l'onde explosive ([4]), et leur idée a été reprise et développée par M. Dixon ([5]);

([1]) Notes de Laplace insérées dans la *Statique chimique de Berthollet*, 1803. — Poisson. *Mémoire sur la théorie du son* (*Journal de l'École Polytechnique*, 14e Cahier, 1808, p. 326), etc.

([2]) *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (Traduction française des *Œuvres de Riemann*, p. 177).

([3]) *Propagation du mouvement dans un fluide indéfini* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, 1887, p. 477). — *Propagation du mouvement dans les corps* (*Journal de l'École Polytechnique*, 57e Cahier, 1887, et 58e Cahier, 1889).

([4]) *Loc. cit.*, p. 360.

([5]) *Loc. cit.*, 1893.

mais la rigueur mathématique fait défaut aux indications de ces savants. On la trouve au contraire dans la tentative de M. Schuster qui a proposé, en 1893 (¹), d'expliquer l'onde explosive par les ondes de choc; mais cet auteur ne paraît pas avoir connu les recherches d'Hugoniot et sa théorie, quoique rigoureuse au point de vue mathématique, est tout à fait incomplète.

D'ailleurs ces interprétations de l'onde explosive reposent sur l'extension, aux fluides qui sont le siège de réactions chimiques, des lois trouvées pour ceux où il ne s'en produit pas, et cette extension, ses auteurs ne la justifient pas à proprement parler. Ils procèdent par une sorte d'intuition pour utiliser, dans un problème où se mêlent la Chimie et la Mécanique, des résultats purement mécaniques. Pour constituer une véritable théorie, il était nécessaire d'introduire dans la question des principes nouveaux. C'est ce qu'a fait M. Duhem (²). Posant le problème des explosions sur son véritable terrain, ce savant l'a abordé dans son intégralité par les méthodes de la Thermodynamique générale qui lui ont permis de le mettre correctement et complètement en équations. Il s'est d'ailleurs borné à développer le cas des ondes ordinaires. Il a fait voir que la méthode d'Hugoniot relative à ces ondes pouvait passer du domaine de la Mécanique dans celui de la Thermodynamique et a montré, grâce à elle, comment la réaction chimique pouvait modifier la vitesse de propagation en introduisant, pour ainsi dire, selon une expression de M. Vieille (³), une élasticité spéciale. Sa théorie permet d'ailleurs, comme nous le montrerons et bien qu'il ne l'ait pas dit explicitement, de rattacher l'apparition de cette élasticité spéciale à la rapidité des réactions explosives. Cette théorie, qu'il a exposée avec l'aide de certaines hypothèses, est, dans une certaine mesure, dans une mesure que nous aurons à préciser,

(¹) *Voir* une Note de M. Schuster dans le Mémoire précité de M. Dixon (1893).

(²) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5ᵉ série, t. II, 1896). — *Voir* aussi *Traité de Mécanique chimique*, t. I, 1897, p. 255.

(³) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXI, 1900, p. 413.

indépendante de ces hypothèses : c'est ce qu'a montré Robin (¹) dans sa Thermodynamique générale.

Toutefois ces travaux n'ont pas conduit encore à une interprétation entièrement satisfaisante de l'onde explosive. Pour que l'onde explosive se propage dans un milieu, il n'est pas nécessaire que celui-ci se trouve déjà porté à sa température d'inflammation, restriction que suppose la théorie de M. Duhem et dont Robin n'a pu parvenir à s'affranchir. M. Vieille, reprenant l'idée de M. Schuster, a fait voir qu'il fallait probablement, dans une interprétation complète, faire intervenir les ondes de choc (²). Mais, comme l'ont montré les expériences de M. Vieille lui-même (³), la vitesse des ondes de choc dans les gaz purs va progressivement en diminuant à mesure qu'elles se propagent, parce que la discontinuité qu'elles présentent sur leur front va en s'atténuant. Or l'onde explosive est caractérisée par une vitesse rigoureusement constante. Il est probable que c'est, comme le dit M. Vieille, la réaction chimique qui entretient dans ce cas la discontinuité. Il convient donc de compléter les recherches de M. Duhem par une étude des ondes de choc dans les milieux qui sont le siège de réactions chimiques et de rechercher comment l'élasticité nouvelle, mise en jeu par ces réactions et décelée par M. Duhem dans les ondes ordinaires, agit dans les ondes de choc.

C'est cette étude qui fait l'objet principal du présent Mémoire. Nous commencerons cependant par examiner les ondes ordinaires ; on peut, croyons-nous, ajouter quelques indications intéressantes à ce qui a été déjà publié sur leur compte et les résultats relatifs à ce cas seront précieux pour bien comprendre celui des ondes de choc. Ainsi d'ailleurs que nous l'avons déjà dit, nous nous attacherons surtout à l'explication de l'onde explosive proprement dite et nous laisserons de côté bien des questions relatives aux phénomènes explosifs. Nous ne prétendons

(¹) *Thermodynamique générale*, 1901, p. 206.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXI, 1900, p. 413. — *Voir* aussi *Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation* (*Mémorial des Poudres et Salpêtres*, t. X, 1899-1900, p. 177). C'est ce Mémoire que nous citerons à l'avenir.

(³) *Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation* (*Mémorial des Poudres et Salpêtres*, t. X, 1899-1900, p. 177).

nullement, en effet, donner une théorie complète de ces phénomènes que les travaux des expérimentateurs ont montrés si complexes; tout au plus chercherons-nous à faire voir que la Mécanique chimique actuelle est assez riche pour s'accommoder, sur ce sujet, de la complexité des faits. Nous ne prétendons même pas donner *la* théorie certaine de la seule onde explosive; nous espérons seulement, en discutant les interprétations qu'on en a déjà données, en en proposant à notre tour deux nouvelles, jeter quelque lumière sur ce phénomène ([1]).

Pour la facilité de la discussion, nous aurons à reproduire ici des résultats déjà connus; nous n'hésiterons pas à le faire. Au point de vue mathématique notamment, nous voudrions qu'on pût lire ce Mémoire en entier sans être obligé de se reporter aux travaux de Riemann, Hugoniot, Duhem et Hadamard ([2]).

Nous emploierons principalement dans ce Mémoire les variables dites *de Lagrange*. Ce sont, selon nous, les véritables variables mécaniques, car elles sont représentatives de l'individualité des masses matérielles. Cet avantage compense largement l'inconvénient qu'elles ont de donner des formules un peu plus compliquées que les variables dites *d'Euler*.

CHAPITRE I.

HYPOTHÈSES ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES.

§ 1. — Équations cinématiques ([3]).

1. Soient t le temps; a, b, c les coordonnées initiales des points matériels d'une masse fluide continue (variables de Lagrange): x, y, z

---

([1]) Nous avons publié quelques-uns des résultats du présent Mémoire dans les Notes suivantes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences: Sur la propagation des discontinuités dans les fluides*, 18 mars 1901. — *Remarques sur la propagation des percussions dans les gaz*, 27 juin 1904. — *Sur l'onde explosive*, 11 juillet 1904. — *Remarques sur la loi adiabatique d'Hugoniot*, 14 novembre 1904. — *Sur l'onde explosive*, 13 mars 1905.

([2]) Riemann, *loc. cit.* — Hugoniot, *loc. cit.* — Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1903. — Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, 1903.

([3]) *Voir* les travaux d'Hugoniot et de M. Hadamard et notre Note des *Comptes rendus* du 18 mars 1901.

leurs coordonnées actuelles (variables d'Euler) qui sont des fonctions de a, b, c, t. Posons

$$(1) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et désignons le coefficient de $\frac{\partial x}{\partial a}$ dans le développement de D par la notation $\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}$. La densité actuelle ρ est donnée en fonction de la densité initiale r par

$$(2) \qquad \rho = \frac{r}{D} \quad \text{(équation de continuité).}$$

On passe du champ a, b, c au champ x, y, z par le changement de variables $x = x(a, b, c, t)$, $y = y(a, b, c, t)$, $z = z(a, b, c, t)$. On a

$$(3) \qquad \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc; \end{cases}$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} D\, da = \frac{\partial(yz)}{\partial(bc)} dx + \frac{\partial(zx)}{\partial(bc)} dy + \frac{\partial(xy)}{\partial(bc)} dz, \\ D\, db = \frac{\partial(yz)}{\partial(ca)} dx + \frac{\partial(zx)}{\partial(ca)} dy + \frac{\partial(xy)}{\partial(ca)} dz, \\ D\, dc = \frac{\partial(yz)}{\partial(ab)} dx + \frac{\partial(zx)}{\partial(ab)} dy + \frac{\partial(xy)}{\partial(ab)} dz, \end{cases}$$

et par suite

$$(5) \qquad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}, \qquad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial(zx)}{\partial(bc)}, \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{D} \frac{\partial(xy)}{\partial(bc)}.$$

. . . .

Si donc on a une fonction H de x, y, z, t, elle est aussi fonction de a, b, c, t, et l'on a

$$(6)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial a}\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)} + \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial b}\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)} + \frac{1}{D}\frac{\partial H}{\partial c}\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}.$$

2. Soit, dans le champ a, b, c, une surface S séparant deux parties 1 et 2 où les x, y, z ont des expressions analytiques différentes : x_1, y_1, z_1 d'un côté, x_2, y_2, z_2 de l'autre, mais telles que, au temps t, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ sur la surface S. S sera une onde de choc si les dérivées premières de x, y, z, c'est-à-dire en somme la vitesse $\frac{\overline{\partial x}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial y}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial z}}{\partial t}$ et la densité ρ, sont discontinues à la traversée de S. Ce sera une onde ordinaire si la discontinuité se manifeste seulement dans les dérivées d'ordre supérieur, et nous supposerons alors qu'elle se manifeste dans les dérivées secondes, en particulier dans les accélérations.

Désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à S menée de 2 vers 1. Les quantités

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= l\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)} + m\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)} + n\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)},\\ M &= l\frac{\partial(zx)}{\partial(bc)} + m\frac{\partial(zx)}{\partial(ca)} + n\frac{\partial(zx)}{\partial(ab)},\\ N &= l\frac{\partial(xy)}{\partial(bc)} + m\frac{\partial(xy)}{\partial(ca)} + n\frac{\partial(xy)}{\partial(ab)}\end{aligned}\right.$$

sont sans discontinuité à la traversée de S. Cela est évident pour les ondes ordinaires. Pour les ondes de choc, cela résulte du fait que, si l'on se déplace sur la surface S, les quantités $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ restent nulles; on a donc

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial a} - \frac{\partial x_2}{\partial a}\right)da + \left(\frac{\partial x_1}{\partial b} - \frac{\partial x_2}{\partial b}\right)db + \left(\frac{\partial x_1}{\partial c} - \frac{\partial x_2}{\partial c}\right)dc = 0$$

pour tous les da, db, dc vérifiant

$$l\,da + m\,db + n\,dc = 0,$$

ce qui exige que

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial a}-\frac{\partial x_2}{\partial a}}{l}=\frac{\frac{\partial x_1}{\partial b}-\frac{\partial x_2}{\partial b}}{m}=\frac{\frac{\partial x_1}{\partial c}-\frac{\partial x_2}{\partial c}}{n}.$$

De même

$$\frac{\frac{\partial y_1}{\partial a}-\frac{\partial y_2}{\partial a}}{l}=\frac{\frac{\partial y_1}{\partial b}-\frac{\partial y_2}{\partial b}}{m}=\frac{\frac{\partial y_1}{\partial c}-\frac{\partial y_2}{\partial c}}{n},$$

$$\frac{\frac{\partial z_1}{\partial a}-\frac{\partial z_2}{\partial a}}{l}=\frac{\frac{\partial z_1}{\partial b}-\frac{\partial z_2}{\partial b}}{m}=\frac{\frac{\partial z_1}{\partial c}-\frac{\partial z_2}{\partial c}}{n}.$$

De là on tire facilement

$$(8)\qquad L_1=L_2,\qquad M_1=M_2,\qquad N_1=N_2.$$

Les quantités L, M, N sont donc définies sans ambiguïté sur S.

Au temps t, les molécules animées du mouvement 1 et les molécules animées du mouvement 2 sont séparées par une surface Σ. Σ est la transformée de S aussi bien dans le changement de variables

$$x=x_1(a,b,c,t),\qquad y=y_1(a,b,c,t),\qquad z=z_1(a,b,c,t)$$

que dans le changement

$$x=x_2(a,b,c,t),\qquad y=y_2(a,b,c,t),\qquad z=z_2(a,b,c,t).$$

La normale à Σ menée de 2 vers 1 a pour cosinus directeurs λ, μ, ν. Les coordonnées a, b, c des points de S peuvent être exprimées en fonction de deux paramètres i, j, lesquels peuvent être choisis de telle sorte que, pour un observateur couché sur la normale l, m, n, les pieds dans 2, la tête dans 1, et observant le parallélogramme

$$(i,j)(i+di,j)(i+di,j+dj)(i,j+dj),$$

le sens défini par cette succession de sommets soit le sens direct. On a

alors, ds désignant la surface de ce parallélogramme,

$$l\,ds = \frac{\partial(bc)}{\partial(ij)}\,di\,dj,$$

$$m\,ds = \frac{\partial(ca)}{\partial(ij)}\,di\,dj,$$

$$n\,ds = \frac{\partial(ab)}{\partial(ij)}\,di\,dj.$$

La surface Σ peut être rapportée aux mêmes paramètres i, j. En vertu de l'impénétrabilité de la matière, la normale λ, μ, ν affectera la même disposition que la normale l, m, n par rapport au parallélogramme $(i, j)(i + di, j)(i + di, j + dj)(i, j + dj)$, dont la surface sera ici $d\sigma$. On aura donc

$$\lambda\,d\sigma = \frac{\partial(y_1 z_1)}{\partial(bc)}\,di\,dj, \qquad \mu\,d\sigma = \frac{\partial(z_1 x_1)}{\partial(bc)}\,di\,dj, \qquad \nu\,d\sigma = \frac{\partial(x_1 y_1)}{\partial(bc)}\,di\,dj.$$

Mais on sait que

$$\frac{\partial(y_1 z_1)}{\partial(ij)} = \frac{\partial(y_1 z_1)}{\partial(bc)}\,\frac{\partial(bc)}{\partial(ij)} + \frac{\partial(y_1 z_1)}{\partial(ca)}\,\frac{\partial(ca)}{\partial(ij)} + \frac{\partial(y_1 z_1)}{\partial(ab)}\,\frac{\partial(ab)}{\partial(ij)}.$$

Donc

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda\,d\sigma = \mathrm{L}\,ds, \\ \mu\,d\sigma = \mathrm{M}\,ds, \\ \nu\,d\sigma = \mathrm{N}\,ds. \end{cases}$$

Par suite de l'impénétrabilité de la matière, ds et $d\sigma$ ne sont pas nuls ; λ, μ, ν ne sont pas nuls à la fois ; donc L, M, N ne sont pas nuls à la fois tous les trois.

A un déplacement da, db, dc situé sur S, c'est-à-dire vérifiant

$$(10)\qquad l\,da + m\,db + n\,dc = 0,$$

correspond, par les formules (3) où l'on peut mettre indifféremment les indices 1 ou 2, un déplacement dx_1, dy_1, dz_1 (ou dx_2, dy_2, dz_2)

situé sur Σ, c'est-à-dire vérifiant

$$(11) \qquad \lambda\, dx_1 + \mu\, dy_1 + \nu\, dz_1 = 0.$$

Or (10) peut s'écrire, par (9),

$$(12) \qquad L\, dx_1 + M\, dy_1 + N\, dz_1 = 0.$$

Enfin des formules (9) nous pouvons tirer les suivantes :

$$(13) \qquad \frac{\lambda}{L} = \frac{\mu}{M} = \frac{\nu}{N} = \frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} = \frac{\lambda L + \mu M + \nu N}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

On a pris le signe + devant le radical, parce que les formules (9) montrent que λ et L ont le même signe.

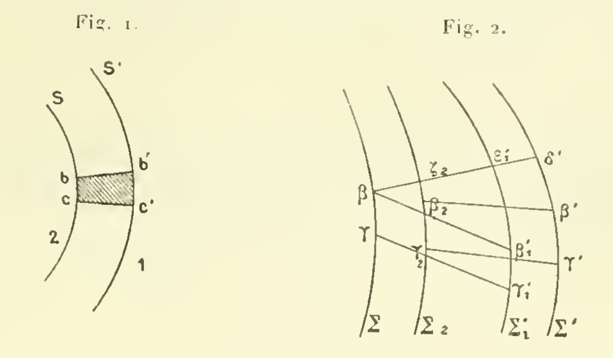
Ces formules montrent que L, M, N ne sont pas nuls tous les trois à la fois.

3. Nous nous placerons dans l'hypothèse où le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1, où il y a véritablement *onde persistante*. Il faut pour cela que ces deux mouvements soient, selon l'expression d'Hugoniot, *compatibles;* nous ne chercherons pas ici les conditions à remplir pour cela ; nous supposerons simplement qu'elles sont remplies. Dès lors la surface S, qui sépare les régions 1 et 2, existe encore au temps $t + dt$, mais elle a, en général, changé de position et est venue en S'; comme cas particulier, d'ailleurs, S' peut coïncider avec S [1]. La longueur bb' interceptée sur la normale l, m, n par S et S' sera désignée par dP : dire que le mouvement 2 se propage dans 1, c'est dire que bb' est dans le sens positif, défini plus haut, de la normale l, m, n ; dP est donc toujours positif. Un petit cylindre de base ds sur S et de hauteur bb' aura pour volume $dP.\,ds$.

Dans le champ des variables d'Euler, les molécules de la surface S sont au temps t sur une surface Σ et au temps $t + dt$ sur une sur-

[1] Avec ces définitions nous considérons les ondes stationnaires comme des cas particuliers des ondes qui se propagent. Ce sont des ondes à vitesse de propagation nulle.

face Σ_2. Les molécules de la surface S' sont, au temps t, sur une surface Σ'_1 et, au temps $t+dt$, sur une surface Σ'.



Soient $\beta\gamma\beta'_1\gamma'_1$ la position de $bcb'c'$ au temps t, $\beta_2\gamma_2\beta'\gamma'$ sa position au temps $t+dt$. Menons $\beta\delta'$ normal à Σ; on peut regarder cette droite comme normale aux quatre surfaces Σ, Σ_2, Σ'_1, Σ'. Posons

$$\beta\delta' = d\Pi,$$
$$\beta\varepsilon'_1 = d\varpi_1,$$
$$\zeta_2\delta' = d\varpi_2.$$

$\frac{d\Pi}{dt}$ est la vitesse réelle de l'onde dans l'espace d'Euler; $\frac{d\varpi_1}{dt}$ est la vitesse de cette onde par rapport à la matière prise en un état initial qui serait l'état 1 à l'instant t; $\frac{d\varpi_2}{dt}$ est la vitesse de cette onde par rapport à la matière prise dans un état initial qui serait l'état 2 à l'instant $t+dt$, soit à l'instant t. La direction positive des vecteurs $d\Pi$, $d\varpi_1$, $d\varpi_2$ est la direction λ, μ, ν, et, comme c'est 2 qui se propage dans 1, $d\varpi_1$ et $d\varpi_2$ sont positifs; $d\Pi$, au contraire, peut être de signe quelconque.

Le chemin $\beta\beta_2$ est évidemment $\overline{u_2\,dt} + \overline{v_2\,dt} + \overline{w_2\,dt}$; le chemin $\beta'_1\beta'$ est $\overline{u_1\,dt} + \overline{v_1\,dt} + \overline{w_1\,dt}$. Comme $\varepsilon'_1\delta'$ est la projection sur la normale de $\beta'_1\beta'$ et que $\beta\zeta_2$ est celle de $\beta\beta_2$, on a

$$\varepsilon'_1\delta' = (\lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1)\,dt,$$
$$\beta\zeta_2 = (\lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2)\,dt$$

et

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Pi}{dt} = \dfrac{d\varpi_1}{dt} + \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1, \\[2mm] \dfrac{d\Pi}{dt} = \dfrac{d\varpi_2}{dt} + \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2. \end{cases}$$

Exprimons que la masse $bcb'c'$ ne change pas par le passage de l'onde. La masse dans l'état initial est $r\,dP\,ds$; dans l'état $\beta\gamma\beta'_1\gamma'_1$, avant d'être traversée par l'onde, elle est $\rho_1\,d\varpi_1\,d\sigma$; dans l'état $\beta_2\gamma_2\beta'\gamma'$, après le passage de l'onde, elle est $\rho_2\,d\varpi_2\,d\sigma$. Donc

$$r\,dP\,ds = \rho_1\,d\varpi_1\,d\sigma = \rho_2\,d\varpi_2\,d\sigma,$$

ce qui donne, en tenant compte de (9), (13),

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varpi_1}{dt} = \dfrac{r}{\rho_1}\dfrac{dP}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \\[2mm] \dfrac{d\varpi_2}{dt} = \dfrac{r}{\rho_2}\dfrac{dP}{dt}\dfrac{1}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}. \end{cases}$$

$\dfrac{d\varpi_1}{dt}$ et $\dfrac{d\varpi_2}{dt}$ ne sont inégaux que dans le cas des ondes de choc. Mais, même inégaux, ils doivent être tels que, en portant les valeurs (15) dans (14), on obtienne la même valeur pour $\dfrac{d\Pi}{dt}$. D'où la condition

$$(16)\quad r\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\frac{dP}{dt} = L(u_2 - u_1) + M(v_2 - v_1) + N(w_2 - w_1),$$

qui peut, en somme, remplacer la seconde équation (15) et qui, par conséquent, exprime que la masse du parallélépipède $bcb'c'$ ne varie pas à la traversée de l'onde. Cette condition joue le rôle d'*équation de continuité* dans le problème des ondes de choc.

§ 2. — Équations thermodynamiques.

4. Soit un mélange formé de gaz qui peuvent se combiner entre eux, par exemple d'hydrogène et d'oxygène. Nous supposons la diffusion négligeable, de sorte qu'un élément de masse dm contient

toujours la même matière, mais avec une composition variable. Cette composition est définie par une variable α; c'est, par exemple, dans le cas que nous venons de citer, le rapport de la masse de vapeur d'eau formée à la quantité totale possible de cette vapeur. La densité ρ et la température absolue T suffisent avec α pour fixer l'état de l'élément dm.

NOUS SUPPOSERONS NÉGLIGEABLE LA RÉSISTANCE A LA DILATATION, A LA COMPRESSION, A LA DÉFORMATION DES ÉLÉMENTS FLUIDES, C'EST-A-DIRE EN UN MOT LA VISCOSITÉ RELATIVE A LA VARIABLE ρ. Dans ces conditions la pression en un point p est bien définie et est reliée à ρ, α, T par l'équation de compressibilité

$$p = f(\rho, \alpha, T). \tag{17}$$

L'application à un parallélépipède infiniment petit du théorème des quantités de mouvement, qui est vrai en Thermodynamique comme en Mécanique classique, donne, comme on sait, les équations

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - j_x,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - j_y,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - j_z,$$

$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$ étant l'accélération due à la force active agissant sur l'élément de masse dm et $\overline{j_x} + \overline{j_y} + \overline{j_z}$ l'accélération de cet élément. Ces équations sont rapportées au champ des variables d'Euler; dans celui des variables de Lagrange, elles se transforment, par (2), (6), en

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial p}{\partial c} = r\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial(zx)}{\partial(bc)}\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial(zx)}{\partial(ca)}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial(zx)}{\partial(ab)}\frac{\partial p}{\partial c} = r\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right),\\
&\frac{\partial(xy)}{\partial(bc)}\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial(xy)}{\partial(ca)}\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial(xy)}{\partial(ab)}\frac{\partial p}{\partial c} = r\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, étant données ρ et T, les lois de la dissociation apprennent qu'il y a une valeur pour α qui correspond à l'équilibre.

Mais nous ne supposerons pas que le milieu est toujours en équilibre chimique; les réactions mettent un certain temps à se produire et nous ne négligerons pas ce phénomène de la *viscosité relative à la variable* α. Nous admettrons que la vitesse de la réaction est, a chaque instant, déterminée par l'état α, ρ, T de la particule. α étant une fonction des variables a, b, c, t de Lagrange, on écrira donc, en désignant par η une quantité *positive* qui ne peut pas devenir nulle et dont nous verrons plus loin l'usage,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \eta\, g(\rho, \alpha, \mathrm{T}). \tag{19}$$

Cette hypothèse toutefois n'est pas nécessaire, et il se pourrait que g contînt aussi $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}$. Nous croyons toutefois que les faits autorisent suffisamment à l'adopter, au moins à titre de première approximation. Nous le ferons donc.

Les états d'équilibre chimique sont caractérisés par le fait que $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ y est nul, de sorte qu'ils vérifient l'équation

$$g(\rho, \alpha, \mathrm{T}) = 0$$

qui est la *loi de la dissociation* et qui représente, dans l'espace des ρ, α, T, une surface, la surface des équilibres vrais, ou, selon l'expression de Gibbs, la surface d'énergie dissipée.

Les fonctions x, y, z, ρ, α, T de a, b, c, t sont six fonctions reliées par les cinq équations (2), (18), (19). On sait qu'il faut, pour les déterminer, une 6e relation, la *relation supplémentaire*. Celle-ci peut être très variable suivant la manière dont se fait le mouvement. L'hypothèse la plus voisine de la réalité consiste à supposer que la chaleur se propage au sein de la masse fluide par simple conductibilité. On obtient alors une relation supplémentaire de forme assez compliquée [1] qu'il est inutile d'écrire ici, car nous ne l'utiliserons pas.

Comme cas particulier, il convient de signaler celui où le fluide a

---

[1] Kirchhoff a donné cette relation même pour le cas où le fluide est visqueux (*Thorie der Warme*, p. 118).

une conductibilité infinie et est en contact avec une source à température constante. Dans ces conditions la température de chaque élément fluide reste elle-même constante et la relation supplémentaire est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Un autre cas particulier est plus intéressant pour la théorie des explosions; c'est celui où le coefficient de conductibilité est assez faible pour que chaque élément dm de la masse fluide subisse des transformations sensiblement adiabatiques. Voyons ce qu'est la relation supplémentaire dans ce cas.

La quantité de chaleur absorbée par l'élément dm dans une transformation $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t} dt$, $\frac{\partial T}{\partial t} dt$ est $dm\left(r_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + r_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt$. Les quantités r_ρ, r_α, c sont, en général, fonctions de α, ρ, T, $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$. Nous supposerons qu'elles ne dépendent pas de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ni de $\frac{\partial T}{\partial t}$, ce qui correspond assez bien à l'idée que l'expérience donne de la température et d'une densité sans viscosité. Dès lors (19) permet de les exprimer en fonction de ρ, α, T seulement.

Si les transformations de chaque élément dm sont adiabatiques, on a :

$$r_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + r_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \tag{20}$$

(2), (17), (18), (19) et (20) sont les équations du problème des explosions au sein des gaz.

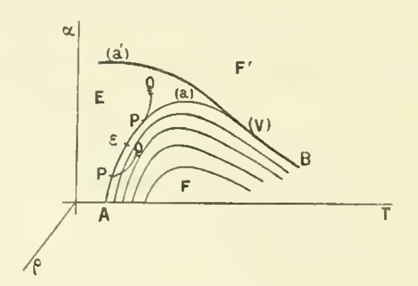
5 [1]. Mais, en posant l'équation (19), nous avons supposé implicitement qu'il n'y avait pas de frottement chimique, au sens que M. Duhem donne à ce mot. Supposons au contraire maintenant que les mélanges explosifs en présentent. Il est alors faux de dire que, pour ρ

---

[1] Cet article et le suivant ne sont que le résumé des principes de la théorie des explosions de M. Duhem (*Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*).

et T donnés, il y a une valeur de α qui correspond à l'équilibre; il y en a en réalité une infinité, comprise entre deux limites a et a'. Ces deux limites sont deux fonctions de ρ, T et l'on peut les représenter, dans l'espace des ρ, α, T, par deux surfaces (a) et (a') qui comprennent entre elles tout un ensemble d'états E pour lesquels l'équilibre est assuré. Tout porte à croire qu'aux hautes températures le frottement chimique tend vers zéro; les deux surfaces (a) et (a') tendent donc à se rapprocher indéfiniment, de sorte que, pour T suffisamment grand, elles n'en forment plus, *pour l'expérimentateur*, qu'une seule, la surface (V) des équilibres véritables. La région E est la *région des faux équilibres* et (a) et (a') sont les *surfaces des faux équilibres limites*.

Fig. 3.



Les états ρ, α, T représentés par des points des régions F et F' ne sont pas des états d'équilibre. Dans la région F, α tend à croître, $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ est positif; dans F', il décroît, $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ est négatif; la première sera dite *région de combinaison*, la seconde *région de décomposition* [1]. Dans l'étude des explosions, les fluides que nous considérerons ne passeront jamais de l'une à l'autre de ces régions. Bornons-nous donc, par exemple, à la région F; on peut écrire pour elle une équation de la forme (19);

[1] Ces dénominations ne sont choisies que pour fixer les idées. En réalité la variable α peut parfaitement être prise de telle sorte que $\frac{\partial\alpha}{\partial t} > 0$ marque une décomposition, $\frac{\partial\alpha}{\partial t} < 0$ une combinaison.

seulement la surface

$$g(\rho, \alpha, t) = 0$$

est ici la surface des faux équilibres limites (a) au lieu d'être celle des équilibres véritables. g est d'ailleurs positif dans toute la région F.

On voit donc que l'existence des faux équilibres ne modifie pas les équations (2), (17), (18), (19), (20) qui restent toujours, à condition qu'on les interprète convenablement, les équations du problème.

6. Les réactions explosives sont toutes *exothermiques*, c'est un fait. On peut toujours supposer la variable α choisie de telle sorte que la réaction exothermique soit caractérisée par $\frac{\partial \alpha}{\partial t} > 0$ [1]. On a alors

$$(21) \qquad r_\alpha < 0.$$

Dans la figure 3 les surfaces (a), (a'), (V) sont représentées par leurs sections par un plan $\rho =$ const. Les lois du déplacement de l'équilibre apprennent que la ligne section de (V) s'abaisse quand T augmente. Quant aux lignes sections de (a) et (a'), l'expérience indique pour elles une allure analogue à celle qui est tracée [2] : de gauche à droite, (a') descend toujours, (a), au contraire, commence par monter puis descend.

Soit l'équation (19) relative à la région F où $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ est positif. Attribuons successivement à $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ toutes les valeurs positives; (19) représente alors une famille de *surfaces d'égale vitesse* tracées dans F et indiquées sur la figure 3 par leurs sections par le plan $\rho =$ const.

Prenons un état de faux équilibre limite, au point P sur (a), et imaginons qu'il se produise à partir de cet état une réaction adiaba-

---

(1) *Voir* la note 1 de la page précédente.

(2) PÉLABON, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXIV, 1897, p. 35; JOUNIAUX, *Action des hydracides halogénés sur l'argent et réactions inverses* (*Thèse de doctorat*, 1901); HÉLIER, *Recherches sur les combinaisons gazeuses* (*Thèse de doctorat*, 1896, ou encore *Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. X, 1897, p. 521 et t. XI, 1897, p. 78).

tique :

$$(20) \qquad r_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + r_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Cela n'est possible que si la modification $d\rho$, $d\alpha$, dT fait pénétrer le point représentatif dans la région F où $g > 0$, c'est-à-dire, puisque $g = 0$ en P, si

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} > 0.$$

Éliminons $\frac{\partial T}{\partial t}$ entre ces deux dernières relations; il vient, pour la condition de possibilité d'une réaction adiabatique,

$$(22) \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c} \frac{\partial g}{\partial T}\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} > \left(\frac{r_\alpha}{c} \frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

En particulier, pour qu'une combinaison adiabatique à volume constant $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ soit possible, il faut, puisque $\frac{\partial \alpha}{\partial t} > 0$, que l'on ait

$$(23) \qquad \frac{r_\alpha}{c} \frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} < 0.$$

Une telle réaction est représentée, dans le plan des α, T, par une courbe PQ qui monte de gauche à droite : son coefficient angulaire est, en effet, par (20), $-\frac{c}{r_\alpha}$ et il est positif en vertu de (21) et du *postulat de Helmholtz* ($c > 0$). La ligne (a) de la figure 3 [section de la surface (a) par un plan ρ = const.] se partage alors en arcs différents, caractérisés par le fait que PQ pénètre ou ne pénètre pas à l'intérieur de F. Avec les formes habituelles des surfaces de faux équilibres limites, il est probable qu'il y a au plus deux arcs différents Aε et εB, limités par un point ε.

Si P est sur l'arc Aε, pour lequel (23) est vérifiée, une réaction adiabatique à volume constant est possible à partir de P; une telle réaction, si elle commence, se continue. Au contraire, dans le cas où P est sur l'arc εB, pour lequel (23) est renversée, si l'on suppose qu'une circonstance accidentelle (échauffement, compression, etc.) trouble légèrement l'équilibre et fasse pénétrer le point représentatif dans la ré-

gion F, si l'on suppose ensuite que, cette circonstance disparaissant, le volume reste constant et les échanges de chaleur avec l'extérieur nuls, la réaction adiabatique à volume constant qui suivra la perturbation ramènera le corps sur la surface des faux équilibres limites. Sur $A\varepsilon$ le faux équilibre limite est *instable;* il est *stable* sur εB.

Nous appellerons, avec M. Duhem, *réaction explosive* une réaction dont la vitesse va en croissant. Quand P est sur $A\varepsilon$, la courbe PQ, pénétrant dans F, coupe, *au moins à son début,* des surfaces d'égale vitesse de réaction correspondant à des vitesses de plus en plus fortes; la réaction adiabatique, à volume constant, représentée par PQ, commence donc par être *explosive.* Il en est de même de toutes les transformations adiabatiques vérifiant (22). Ces transformations peuvent, en un même point P, être telles que $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ y soit positif ou négatif, mais cela ne veut pas dire que $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ y puisse avoir une valeur quelconque. En effet, nous sommes sur $A\varepsilon$, donc (23) est vérifiée; supposons en outre, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} > 0. \tag{24}$$

Toutes les réactions avec $\frac{\partial\rho}{\partial t} > 0$ seront alors possibles et explosives, au moins à leur début; au contraire les réactions avec $\frac{\partial\rho}{\partial t} < 0$ ne le seront que si

$$\frac{\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|}{\frac{\partial\alpha}{\partial t}} < \frac{\frac{\partial g}{\partial\alpha} - \frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T}}{\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T}},$$

ce qui exige que $\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|$ commence par être très petit, comme fait $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$. Il y a donc, à partir de P, des réactions adiabatiques explosives et non explosives; *mais la réaction adiabatique à volume constant est explosive;* nous dirons alors que le corps en un point P de l'arc $A\varepsilon$ est explosif. Le mot *corps explosif* prend ainsi une signification précise qu'il n'avait pas jusqu'ici.

Quand P est sur l'arc εB le corps n'est pas explosif. Il n'y en a pas

moins certaines réactions issues de P qui sont explosives. Prenons, par exemple, les réactions adiabatiques; elles seront possibles et explosives, *au moins à leur début*, si (22) est vérifiée. Sur εB on a

$$\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} > 0.$$

Plaçons-nous encore dans l'hypothèse (24). Dès lors (22) ne sera vérifiée pour aucune transformation où $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ sera négatif; elle le sera au contraire pour certaines transformations s'effectuant avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$, notamment toutes les fois que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ne sera pas très petit.

Toutes ces conclusions seraient renversées si, au lieu de (24), on avait

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{dg}{\partial T} < 0.$$

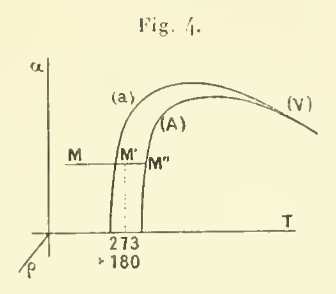
Que signifie donc la condition (24)? A partir du point P, comprimons adiabatiquement le fluide; au commencement de l'opération, α ne varie pas, et, suivant la forme de (a), le point représentatif pénètre dans F ou dans E; dans le premier cas la compression provoquera la combinaison chimique; elle ne provoquera rien dans le second. Si $\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T}$ est positif, on est dans le premier cas, une compression provoque la combinaison, une dilatation au contraire ne détermine aucune variation de α.

7. Plusieurs auteurs contestent l'existence du frottement chimique. Remarquant que le mélange $H^2 + O$, pour ne citer qu'un exemple, brûle lentement dès 180° tandis qu'il ne s'enflamme que vers 555°, ils estiment que les faux équilibres ne sont que des équilibres apparents, nous paraissant tels parce que la réaction chimique s'y accomplit avec une lenteur extrême. Dans cette manière de voir, les surfaces (a) et (a') n'existent pas : il n'y a pas, en dehors de la surface des équilibres véritables, de surfaces de vitesse nulle. Il semble, si l'on adopte ces idées, qu'il n'y ait rien à retenir des considérations des articles 5 et 6.

Mais, pour les corps qui donnent lieu au phénomène de l'onde ex-

plosive, il se présente une circonstance qui rétablit tout l'intérêt de ces considérations et grâce à laquelle *la notion de frottement chimique n'est pas essentielle à notre théorie*. Prenons un mélange d'hydrogène, d'oxygène et de vapeur d'eau à la température ordinaire, au point M (*fig.* 4). Élevons sa température à volume constant. A 180° (point M'), on observe qu'il brûle lentement; si les faux équi-

Fig. 4.



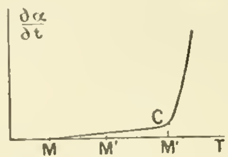
libres n'existent pas, cette observation n'a rien de surprenant; si les faux équilibres existent, elle prouve simplement que la surface (*a*) a été traversée entre M et M'. Chauffons encore. « Lorsque la température à laquelle on porte le mélange — nous citons ici MM. Mallard et Le Chatelier [1] — atteint un certain chiffre déterminé, il se produit, dans toute la masse, une combustion soudaine qu'accompagnent des phénomènes de lumière et d'expansion. Ce mode de combustion, bien connu de tout le monde, a reçu le nom d'*inflammation* et la température nécessaire pour qu'il se produise est la température d'inflammation. » En somme, la vitesse de la réaction reste d'abord, pendant le parcours M'M'', très faible et insensible aux moyens ordinaires d'observation; puis très rapidement, aux environs d'un point M'', elle prend des valeurs beaucoup plus grandes. Le point M'' n'est pas rigoureusement déterminé, mais l'expérience montre qu'il l'est assez bien; pour le mélange $H^2 + O$ il est aux environs de 555°. Portons en abscisses les températures, en ordonnées les vitesses de réaction; on obtient une courbe ayant l'allure de la figure 5; la température d'inflammation est l'abscisse du coude C, suffisamment bien déterminée pour l'expérimentateur. Nous sommes ainsi conduits à admettre qu'il y a une zone très étroite (A) (*fig.* 4), pra-

---

(1) *Loc. cit.*, p. 276.

tiquement *une surface*, limitant deux régions, l'une où la vitesse de réaction est insensible aux moyens ordinaires d'observation et *peut même être considérée comme nulle toutes les fois qu'on étudie des*

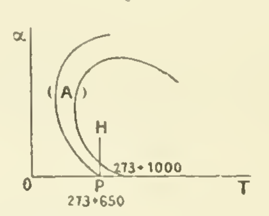
Fig. 5.



phénomènes qui ne durent pas un temps trop long, l'autre, au contraire, où cette vitesse est assez grande.

La zone (A) n'a pas la même étroitesse pour tous les corps, de sorte que la température d'inflammation n'est pas toujours déterminée avec la même précision. C'est ainsi que, pour les mélanges de formène et d'oxygène, celle-ci paraît un peu flottante. Le phénomène du *retard à l'inflammation* (¹) semble montrer que la zone (A) est, dans ce cas, assez large et limitée par deux surfaces coupant l'axe OT respectivement à $273° + 650°$ et à $273° + 1000°$, et affectant l'allure de la figure 6. Dès 650° la réaction se produit avec une vitesse assez notable

Fig. 6.



et, au fur et à mesure que la combustion se fait (ligne PH), la vitesse croît pour devenir très grande au bout d'une dizaine de secondes. A 1000°, au contraire, la réaction est presque instantanée. Dans l'étude de l'onde explosive, où une durée de 10 secondes constitue un espace de temps énorme, ce serait vers 1000° qu'il faudrait placer la température d'inflammation; quand on s'occupe au contraire des questions de

(¹) MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 291.

sécurité dans les mines à grisou, il faut l'abaisser à 650°. On voit qu'il semble que, même dans ce cas, on puisse concevoir une surface (A), à condition toutefois de changer cette surface suivant le problème qu'on étudie.

Quoi qu'il en soit, prenons les cas où une telle surface (A) est assez bien définie. Elle est évidemment une surface d'égale vitesse et l'on peut lui appliquer tout ce qui a été dit plus haut pour (a) : ainsi (A) vient *probablement* se confondre aux hautes températures avec (V) et avec (a) si (a) existe; *ainsi encore* (A) *peut se partager en arcs explosifs et arcs non explosifs*. Il suffit donc, pour pouvoir conserver ce qui a été dit aux articles 5 et 6, même dans le cas où les faux équilibres n'existent pas, de désigner par (a) la surface (A), c'est-à-dire de considérer (a) non plus comme une surface de vitesse nulle, *mais comme une surface à partir de laquelle la vitesse commence à être sensible*. Une telle surface peut exister aussi bien si la théorie du frottement chimique est fausse que si elle est vraie et, dans ce dernier cas, elle ne coïncide pas forcément avec la surface des faux équilibres limites. Grâce à cette convention, il nous sera permis d'employer dans tout ce qui va suivre le langage de la théorie des faux équilibres; c'est ce que nous ferons et nous continuerons à désigner la surface (a) par la dénomination de *surface des faux équilibres limites*, bien qu'à partir de maintenant elle soit pour nous celle à partir de laquelle la vitesse de réaction devient sensible. Comme la surface (a) ainsi comprise est plus ou moins bien déterminée suivant les cas, nos raisonnements seront, suivant les cas, une approximation plus ou moins satisfaisante de la réalité.

8. Il suffit, pour que l'approximation soit légitime, qu'à partir de (a) la vitesse devienne assez vite assez grande. Mais souvent, elle fait plus; elle devient *très vite très grande*. Ceci nous conduit à une définition QUI EST, A LA VÉRITÉ, UNE VÉRITABLE HYPOTHÈSE, CAR ELLE EST UNE INTERPRÉTATION DES FAITS, la définition des corps *à réaction vive*.

Il est certain que la réaction PQ (*fig.* 3), quand sa courbe représentative pénètre dans F, est d'autant plus accélérée que les surfaces d'égale vitesse de réaction sont plus resserrées. Nous dirons qu'un corps est *à réaction vive* quand les surfaces d'égale vitesse de réac-

tion y relatives sont très voisines les unes des autres et de (a) [ou de (A) que nous ne distinguons plus de (a) comme il vient d'être dit]. Précisons. Déplaçons-nous d'une très petite quantité θ à partir de (a) sur la normale à (a) vers l'intérieur de F; nous admettons que nous traversons alors une très grande quantité de surfaces et que nous arrivons très vite sur celles qui correspondent à des $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ énormes. Nous pouvons toujours trouver, pour représenter la surface (a), une équation dont le premier membre reste *très petit* et positif quand on s'écarte de la quantité très petite θ de la surface (a), et l'on peut évidemment supposer que cette équation n'est autre que $g(\rho, \alpha, T) = 0$; la quantité η devra être alors, dans la zone θ, une quantité très grande, très grande même par rapport aux valeurs prises par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ dans cette zone. Dès lors, on peut considérer à titre d'approximation que tous les points de la zone θ vérifient à peu près l'équation $g(\rho, \alpha, T) = 0$.

Recommençons, dans le cas des corps à réaction vive, la discussion de l'article **6**. Prenons d'abord P sur l'arc εB où

$$\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} > 0;$$

supposons, pour fixer les idées,

$$(24) \qquad \frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} > 0,$$

et considérons une réaction adiabatique PQ pénétrant dans F, à partir de P. La condition (22) qui exprime que la réaction PQ pénètre ainsi du côté des $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ croissants, s'écrit

$$(25) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} > \frac{\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}}{\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T}}\frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

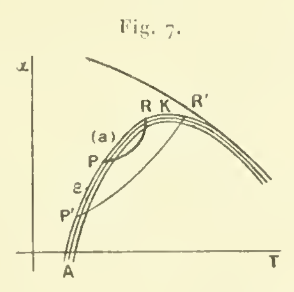
et le coefficient de $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ y est positif. Mais la démonstration de cette inégalité, donnée pour la surface (a), s'applique à toutes les surfaces d'égale vitesse de la zone θ; cette relation exprime donc la condition que doit remplir en un point de la zone θ une transformation adiaba-

tique pour traverser dans le sens des $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ croissants la surface d'égale vitesse passant par ce point ou, en un mot, pour être *explosive* en ce point. D'une surface à l'autre, le coefficient de $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ peut varier, mais on peut admettre qu'il varie peu dans la zone θ, qu'en tous cas il ne tend pas vers zéro. Mais, au fur et à mesure qu'on applique (25) à des surfaces de plus en plus éloignées de (a), $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ est de plus en plus grand; il devient même très considérable avant qu'on ait traversé toute la zone θ. A moins donc que $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ ne soit énorme, on rencontrera, avant la fin de cette zone, un point pour lequel (25) ne sera plus vérifiée, pour lequel la réaction PQ cessera d'être explosive, ce qui revient à dire que le point représentatif ne traversera pas la zone θ ou, encore, que l'état du fluide pourra toujours être considéré comme vérifiant approximativement l'équation

$$g(\rho, \alpha, T) = 0.$$

Le point représentatif ne peut s'éloigner sensiblement de la surface $g = 0$ que lorsque $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ est très grand; on a alors une modification PR (*fig.* 7) ramenant le corps en R sur (a) et produisant une variation

Fig. 7.



très rapide de ρ, de T et de α : nous considérons (C'EST UNE HYPOTHÈSE) que les vitesses $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ des corps à réaction vive sont assez grandes pour qu'un tel phénomène ne puisse se produire que dans une quasi-onde de choc (*voir* Chap. III, § 5).

Si l'on part d'un point P′ situé sur Aε, le point représentatif peut

quitter la surface $g = 0$ sans que $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ soit grand. Par exemple $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ étant nul (volume constant), on peut avoir la réaction adiabatique P'R' au cours de laquelle α et T varient excessivement vite, presque instantanément. De là la conséquence suivante. Chauffons notre corps à volume constant jusqu'en P'; arrivés en P', la réaction chimique s'amorce et se fait tellement vite qu'elle peut être considérée comme adiabatique sans qu'il soit nécessaire de prendre de précautions pour isoler calorifiquement le corps. Cette conséquence paraît bien d'accord avec ce que l'expérience apprend sur les corps violemment explosifs.

Ainsi, pour les corps à réaction vive, toutes les réactions adiabatiques ou bien sont pratiquement instantanées ou bien sont telles que les ρ, α, T du corps vérifient toujours l'équation

$$g(\rho, \alpha, T) = 0. \tag{26}$$

Il est bien évident que ce résultat, démontré pour les combustions adiabatiques, s'étend à toute espèce de transformations, soumises à n'importe quelle relation supplémentaire. En effet, de deux choses l'une, ou bien la combustion est telle que son point représentatif ne sort pas de la zone 0, et alors elle se fait en vérifiant (26), ou bien ce point pénètre dans la région F et alors, PAR NOS HYPOTHÈSES, la vitesse $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ est si grande qu'on peut la considérer comme instantanée.

En particulier, à partir de l'arc Aε, toutes les combustions adiabatiques, sauf une petite proportion de celles où $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ est négatif, sont instantanées. Mais il peut y avoir des combustions laissant le corps sur la surface $g = 0$. Celles où la conductibilité jouera un rôle très notable seront certainement de celles-là; en effet, prenons le cas limite de la conductibilité infinie et des transformations isothermes se faisant à ρ constant; avec la forme adoptée pour la surface (a), on voit que de telles transformations, bien loin de faire pénétrer le point représentatif dans la région F, tendent à le faire entrer dans E; en d'autres termes la combustion tend à s'arrêter sur la surface $g = 0$ [1].

---

[1] M. Hélier a pu, en le refroidissant avec assez d'énergie, maintenir un mélange d'hydrogène et d'oxygène à 825° sans qu'il se produise d'explosion (*Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. X, 1897, p. 539).

Ainsi donc nous pouvons dire que, pour les corps à réaction vive, TOUTES LES RÉACTIONS *ou bien sont pratiquement instantanées, ou bien vérifient toujours l'équation* (26).

Cette dernière propriété a été prise par M. Duhem comme hypothèse fondamentale dans ses études sur l'onde explosive ([1]). Ce qui précède montre qu'elle se rattache très facilement à la violence des explosions. Nous dirons qu'un corps à réaction vive brûle soit instantanément, soit *suivant la loi de M. Duhem.*

Revenons au cas particulier des combustions adiabatiques, à partir de l'arc εB. Toutes ces transformations sont, dans le cas où $\frac{\partial g}{\partial T} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} > 0$, des réactions avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$; dans le cas où $\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} < 0$, des réactions avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$. Il se peut très bien que, pour un même explosif, l'arc εB se divise en plusieurs parties pour lesquelles ce soit tantôt l'un, tantôt l'autre cas qui se présente ([2]).

9. Dans les combustions adiabatiques se faisant suivant la loi de M. Duhem, nous avons à la fois

(20) $$r_\rho\, d\rho + r_\alpha\, d\alpha + c\, dT = 0,$$

(26) $$g(\rho, \alpha, T) = 0.$$

(26) permet d'exprimer ρ et $d\rho$ en fonction de α, T, $d\alpha$, dT. En portant dans (20), on a une équation différentielle à deux variables, qui admet toujours un facteur intégrant. La résolution de cette équation permet donc d'exprimer α en fonction de T et l'on peut dire que, dans les réactions qui nous occupent, le degré de combinaison est fonction de la seule température.

([1]) *Théorie thermodynamique, etc.*, p. 172. — *Mécanique chimique*, t. I, p. 283.

([2]) Dans l'exposé que M. Duhem a donné de sa théorie, il a fait quelques hypothèses particulières aux termes desquelles, K étant le sommet de la courbe (a) (*fig.* 7), l'arc εK correspond aux combustions avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ et l'arc KB aux combustions avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$.

Cette propriété a été prise par Robin pour définition des *réactions explosives* (¹). Il ne nous paraît pas qu'elle traduise assez immédiatement pour pouvoir jouer ce rôle la notion que l'expérience nous donne de ces réactions, et nous croyons préférable de la justifier par les considérations qui précèdent. En suivant cette voie, nous ne renonçons nullement, on l'a vu, au principal avantage de la méthode de Robin qui est d'affranchir la théorie des hypothèses trop étroites relatives au frottement chimique. D'autre part, nous pouvons conserver la définition si heureuse donnée par M. Duhem des réactions explosives. Nous sommes obligés, il est vrai, de distinguer entre les corps explosifs ordinaires et les corps explosifs à réaction vive; mais c'est, à notre avis, un véritable avantage : on sait, en effet, que les réactions chimiques ne se propagent avec les grandes vitesses mises en évidence par les expériences de MM. Berthelot et Vieille que dans les mélanges très violents. Il est loisible d'ailleurs au lecteur, s'il ne partage pas notre avis sur ce point, de laisser de côté les préliminaires par où nous parvenons à la définition de Robin et de partir de cette définition pour lire ce que nous dirons des mouvements adiabatiques des corps à réaction vive.

Une remarque est importante pour finir. La relation entre α et T que nous obtenons par la résolution des deux équations (20) et (26) dépend, (20) étant une équation différentielle, de l'*état initial* du corps. Dans un système gazeux formé d'éléments pris en des états initiaux différents, la forme de cette relation varie d'un élément à l'autre.

10*. Les équations (17), (18), (19), (20), la relation (19) étant parfois remplacée, comme on vient de le voir, par (26), sont les équations thermodynamiques du problème des explosions. Elles ont été posées pour la première fois par M. Duhem (²). Mais ce savant n'a pas suivi tout à fait, pour les établir, la méthode que nous avons adoptée. Il a fait intervenir dans sa théorie la notion de potentiel interne. La démonstration de l'existence du potentiel interne soulève les difficultés

---

(¹) *Thermodynamique générale*, p. 206.

(²) *Théorie thermodynamique, etc.*, p. 186 du tirage à part. — *Traité de Mécanique chimique*, t. I, p. 280.

relatives aux modifications virtuelles ou aux corps témoins de Robin, difficultés déjà assez sérieuses en l'absence du frottement chimique, plus graves encore quand ce phénomène apparaît. C'est pourquoi il nous a paru utile de montrer, en suivant avec plus ou moins de fidélité les indications de Robin, comment on peut obtenir les équations fondamentales du problème, sans parler de potentiel interne, en faisant appel aux idées les plus simples. Cette méthode a l'avantage de faire voir, comme nous l'annoncions dans notre avant-propos, en quoi la théorie de M. Duhem est indépendante de certaines de ses hypothèses fondamentales.

Montrons, au contraire, maintenant comment la notion de potentiel interne permet d'écrire nos équations et les indications nouvelles qu'elle apporte.

Un élément de masse dm a un potentiel interne $\mathcal{F}(\rho, \alpha, T)\,dm$. Le potentiel de la masse totale du gaz sera

$$\mathbf{S}\,\mathcal{F}(\rho, \alpha, T)\,dm$$

s'il ne s'exerce aucune action entre les divers éléments [1]. Chaque élément dm a une viscosité interne; nous négligerons celle qui correspond à la compression, à la dilatation, à la déformation et nous ne supposerons sensible que celle qui se rapporte à la variable α dont le travail virtuel est $\varphi\,dm\,\delta\alpha$. En général, à la variable α correspond même un frottement chimique; nous comprendrons le coefficient de frottement avec celui de viscosité dans φ; il n'y aura de ce chef aucune difficulté *tant qu'on se bornera à étudier des réactions toutes de même sens*, car φ conservera alors toujours la même forme. Si l'on s'occupe des réactions où $\frac{\partial \alpha}{\partial t} > 0$, φ est *négatif*. Les équations du mouvement s'obtiennent en écrivant :

$$(27)\quad \mathbf{S}\,\delta_T \mathcal{F}\,dm - \mathbf{S}\,[(X - j_x)\,\delta x + (Y - j_y)\,\delta y + (Z - j_z)\,\delta z]\,dm - \mathbf{S}\,\varphi\,\delta\alpha\,dm = 0,$$

[1] Il serait très facile de traiter de même le cas où il y aurait des actions entre les éléments. Mais, cette complication n'étant pas intéressante pour la théorie des explosions, nous la laisserons de côté.

le symbole δ_T marquant une différenciation effectuée en laissant constante la température de chaque élément. Le champ des intégrales de (27) est un champ de variables de Lagrange, c'est-à-dire de coordonnées initiales des molécules, mais *on prendra comme état initial l'état actuel à l'instant t*. Nous avons d'ailleurs laissé de côté les forces qui peuvent agir à la périphérie de la masse fluide; elles ne figurent que dans des intégrales de surface qui n'interviennent que dans les équations aux limites dont nous ne nous occuperons pas ici.

Si l'on remarque que

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),$$

on peut écrire (27) ainsi qu'il suit :

$$-\mathbf{S}\rho^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz + \mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha} - \varphi\right)\delta\alpha\,dm$$
$$-\mathbf{S}[(X - j_x)\,\delta x + (Y - j_y)\,\delta y + (Z - j_z)\,\delta z]\,dm = 0.$$

Posons

$$(17') \qquad p = \rho^2\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho}$$

et intégrons par parties le premier terme de l'équation précédente. Nous aurons, en laissant de côté les intégrales de surface :

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\,\delta z\right)dx\,dy\,dz + \mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha} - \varphi\right)\delta\alpha\,dm$$
$$-\mathbf{S}[(X - j_x)\,\delta x + (Y - j_y)\,\delta y + (Z - j_z)\,\delta z]\,\rho\,dx\,dy\,dz = 0.$$

De là les équations :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - j_x, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - j_y, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - j_z,$$

et par suite les équations (18). De là aussi

$$(19') \qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha} = \varphi,$$

d'où l'on tirerait (19) en résolvant par rapport à $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ dont dépend φ.

La chaleur absorbée par l'élément dm est, en exprimant la quantité de chaleur en unités dynamiques :

$$\left(-\mathrm{T}\,d\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mathrm{T}} + \varphi\,d\alpha\right)dm.$$

On exprimera que la transformation de l'élément est adiabatique en écrivant :

$$-\mathrm{T}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}d\rho + \left(-\mathrm{T}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathrm{T}} + \varphi\right)d\alpha - \mathrm{T}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\mathrm{T}^2}d\mathrm{T} = 0$$

ou, encore, vu (19'),

$$(20')\qquad -\mathrm{T}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\rho\,\partial\mathrm{T}}d\rho + \left(-\mathrm{T}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathrm{T}} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \mathrm{T}\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\mathrm{T}^2}d\mathrm{T} = 0.$$

Les équations (17'), (18), (19'), (20') ne sont autre chose que les équations (17), (18), (19), (20) sous une autre forme.

Pour être tout à fait général, il faudrait admettre, en vertu des principes fondamentaux de la Thermodynamique générale [1], que φ est une fonction de $\rho, \alpha, \mathrm{T}, \frac{\partial\rho}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\cdot$ Dans toutes ses études de Thermodynamique, M. Duhem suppose que $\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}$ n'entre pas dans les coefficients de viscosité et de frottement; dans sa théorie des explosions, il a fait la même hypothèse pour $\frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot$ Cela revient à admettre que la vitesse de réaction $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ tirée de (19') est une simple fonction de ρ, α, T et ne dépend ni de la vitesse d'échauffement ni de la vitesse de compression du corps. Outre que cette hypothèse est la plus simple qu'on puisse faire, elle est en même temps assez vraisemblable, surtout en ce qui concerne $\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}\cdot$ Nous avons déjà dit, dans l'article 4, que nous la ferions.

Quant à l'hypothèse, faite dans le même article, que r_ρ, r_α, c peuvent

---

(1) Voir à ce sujet le principe auquel Robin a donné le nom de *principe d'inhérédité* (*Thermodynamique générale*, p. 233), et la distinction, si fréquemment présentée par M. Duhem, entre les variables avec inertie et sans inertie (*Théorie thermodynamique de la viscosité, etc.*, p. 130 du tirage à part).

être exprimés uniquement en fonction de ρ, α, T, elle n'en est plus une ici, où nous avons l'expression de ces coefficients en fonction de $\mathcal{F}$; il n'est même pas nécessaire, pour qu'elle soit exacte, que φ soit indépendant de $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$.

On sait que la notion de potentiel interne a depuis longtemps fait ses preuves en Mécanique chimique, et ce qui précède suffit même à montrer qu'elle apporte de grands éclaircissements dans les questions où on l'introduit. On voit en effet que, dans le seul problème qui nous occupe, elle éclaire d'un jour nouveau la notion de pression et d'équation de compressibilité, qu'elle rattache clairement la vitesse des réactions au principe de Carnot, qu'elle fait nettement la distinction capitale entre les variables sans inertie et les variables à inertie, qu'elle donne enfin sur les coefficients r_ρ, r_α, c des renseignements fort utiles. D'ailleurs les difficultés que nous avons dit plus haut qu'elle soulevait sont loin d'être insurmontables. On aurait donc tort, à notre avis, de ne pas s'en servir dans la théorie des explosions, et nous n'hésiterons pas à l'adopter. Mais comme il est toujours intéressant de savoir quelle est, dans une théorie, la part de telle ou telle hypothèse, nous aurons soin de marquer par un astérisque les articles, comme celui-ci, où nous la ferons intervenir. De cette manière nous montrerons bien ce qu'il y aura, dans nos résultats, d'indépendant d'elle, et en même temps nous ferons ressortir nettement ce qu'elle nous apprendra de nouveau.

Il est bien entendu naturellement que, toutes les fois que la notion de potentiel interne ne soulève aucune difficulté spéciale, c'est-à-dire toutes les fois qu'on peut manifestement rendre réversible sans l'emploi de corps témoins une modification quelconque, il est tout simple d'user de cette notion, et qu'il devient inutile de signaler son usage à l'attention. Dans ces cas-là nous supprimerons bien entendu l'astérisque.

Enfin il ne faudrait pas croire que tout ce qui, dans ce Mémoire, sera traité sans parler de potentiel interne sera *rigoureusement* exempt des difficultés relatives aux corps témoins et aux modifications virtuelles. Il est bien difficile de faire de la Thermodynamique sans être, *au moins un peu,* tributaire de ces difficultés. On les rencontre par exemple dans la manière dont nous introduisons la quantité ML dans

l'équation (51) du Chapitre III. Néanmoins c'est surtout pour l'établissement de la notion de potentiel interne, ou, ce qui revient au même, d'entropie, qu'elles sont importantes.

CHAPITRE II.

LES ONDES ORDINAIRES.

§ 1. — Généralités (¹).

Première équation. — **1**. Soit l'onde S, dans le champ des variables de Lagrange, séparant les régions 1 et 2. Nous supposerons ici que x, y, z, qui sont fonctions de a, b, c, t, sont continus à la traversée de S ainsi que toutes leurs dérivées partielles du premier ordre. Dès lors, la *vitesse* et la *densité* sont aussi continues à la traversée de S. Nous supposerons qu'il en est de même pour la *température* et pour la *variable* α. Il en est de même aussi, par conséquent, pour la *pression*, en vertu de [(17), I] (²). Posons, pour abréger,

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \qquad w = \frac{\partial z}{\partial t};$$

u, v, w sont encore fonctions de a, b, c, t. Dans la région 1, ces fonctions ont la forme u_1, v_1, w_1; dans la région 2, la forme u_2, v_2, w_2. Posons

$$(1)\quad \begin{cases} U = u_1 - u_2, \qquad V = v_1 - v_2, \qquad W = w_1 - w_2 \\ \text{et de même} \\ R = \rho_1 - \rho_2, \qquad A = \alpha_1 - \alpha_2, \qquad \Theta = T_1 - T_2. \end{cases}$$

Ces expressions sont, par hypothèse, nulles sur S. *Mais nous supposerons que quelques dérivées partielles du premier ordre de*

(¹) Ce Paragraphe ne contient que l'application aux fluides affectés d'une variable chimique des principaux résultats obtenus par Hugoniot et par MM. Duhem et Hadamard.

(²) Cette notation renvoie à l'équation (17) du Chapitre I.

quelques-unes d'entre elles au moins y sont différentes de zéro.

Nous avons donc, par exemple, U = o sur S. Par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial a}da + \frac{\partial U}{\partial b}db + \frac{\partial U}{\partial c}dc = 0,$$

toutes les fois que le vecteur $\overline{da} + \overline{db} + \overline{dc}$ est situé sur S, c'est-à-dire que

$$l\,da + m\,db + n\,dc = 0.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial U}{\partial a}}{l} = \frac{\frac{\partial U}{\partial b}}{m} = \frac{\frac{\partial U}{\partial c}}{n} = l\frac{\partial U}{\partial a} + m\frac{\partial U}{\partial b} + n\frac{\partial U}{\partial c} = \frac{dU}{dP},$$

$\frac{dU}{dP}$ étant la dérivée de U suivant la normale l, m, n.

Au bout du temps dt, l'onde S est venue en S' (I, 3) [1]. La longueur bb' (*fig.* 1) est dP et $\frac{dP}{dt}$ est la vitesse de propagation de l'onde. Au point b et au temps t, U est nul; il l'est encore en b', mais au temps $t + dt$. Donc

$$\frac{\partial U}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial U}{\partial a}l + \frac{\partial U}{\partial b}m + \frac{\partial U}{\partial c}n\right)dP = 0$$

ou

$$(3) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dP}{dt}\frac{dU}{dP} = 0.$$

La discontinuité dont est affectée la vitesse u ne peut porter que sur ses dérivées premières : cette discontinuité est donnée par les valeurs de $\frac{\partial U}{\partial a}, \frac{\partial U}{\partial b}, \frac{\partial U}{\partial c}, \frac{\partial U}{\partial t}$. Les équations (2) et (3) montrent que la discontinuité est connue quand on connaît les deux paramètres $\frac{dU}{dP}$ et $\frac{\partial U}{\partial t}$, dont le rapport vaut d'ailleurs $-\frac{dP}{dt}$ [2].

Ce que nous disons de U est vrai de U, V, W, R, A, Θ. Ces six quantités vérifient des équations analogues à (2), (3), qu'il est inutile d'écrire.

---

(1) Cette notation renvoie au n° 3 du Chapitre I.

(2) Hadamard, *loc. cit.*, p. 109.

2. Mais prenons la première équation [(18), I]. Elle peut s'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial \rho}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial \rho}{\partial a}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial \rho}{\partial b}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial \rho}{\partial c}\right]\\ &+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial \alpha}{\partial a}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial \alpha}{\partial b}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial \alpha}{\partial c}\right]\\ &+\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial a}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial b}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial c}\right]=r\left(\mathrm{X}-\frac{\partial u}{\partial t}\right). \end{aligned}\right.$$

Écrivons cette équation pour les points de 1 infiniment voisins de S; il faut, pour cela, affecter des indices 1 les quantités $x, y, z, u, v, w, p, \rho, \alpha, \mathrm{T}$. Écrivons-la de même pour les points de 2 infiniment voisins de S, en mettant aux mêmes lettres les indices 2. Retranchons ensuite l'une de l'autre les deux équations ainsi écrites, en remarquant que les expressions $\frac{\partial p}{\partial \rho}, \frac{\partial p}{\partial \alpha}, \frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}$ (qui sont des fonctions de ρ, α, T), $\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}$, $\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}, \frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}$ (qui ne contiennent que les dérivées premières de y, z), X $\left(\text{qui est fonction de } \rho, \alpha, \mathrm{T}, a, b, c, t, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$, ont la même valeur, qu'elles soient affectées des indices 1 ou 2. Il viendra

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial \rho}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial b}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c}\right]\\ &+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial b}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c}\right]\\ &+\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial \Theta}{\partial a}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial \Theta}{\partial b}+\frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial \Theta}{\partial c}\right]=-r\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Rappelons-nous la définition [(7), I] de L, M, N. (2) et (3) transforment l'équation précédente en

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}}\right)\mathrm{L}=r\frac{d\mathrm{P}}{dt}\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{P}}.\\ &\text{On a de même :}\\ &\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}}\right)\mathrm{M}=r\frac{d\mathrm{P}}{dt}\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{P}},\\ &\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}}\right)\mathrm{N}=r\frac{d\mathrm{P}}{dt}\frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{P}}. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons ces trois équations, après multiplication par L, M, N,

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}}\right)(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2) \\
&\quad = r\frac{d\mathrm{P}}{dt}\left(\mathrm{L}\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{P}} + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{P}} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{P}}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation [(2), 1] donne

$$
\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t} + \frac{r}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(yz)}{\partial(bc)}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial(yz)}{\partial(ca)}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial(yz)}{\partial(ab)}\frac{\partial u}{\partial c} \\
&+ \frac{\partial(zx)}{\partial(bc)}\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial(zx)}{\partial(ca)}\frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial(zx)}{\partial(ab)}\frac{\partial v}{\partial c} \\
&+ \frac{\partial(xy)}{\partial(bc)}\frac{\partial w}{\partial a} + \frac{\partial(xy)}{\partial(ca)}\frac{\partial w}{\partial b} + \frac{\partial(xy)}{\partial(ab)}\frac{\partial w}{\partial c} + \frac{r}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.
\end{aligned}
$$

En traitant cette équation comme on a traité (4), on obtient :

$$
(7)\qquad \mathrm{L}\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{P}} + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{P}} + \mathrm{N}\frac{d\mathrm{W}}{d\mathrm{P}} = \frac{r}{\rho^2}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}},
$$

qui permet de transformer (6) en

$$
(8)\qquad \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{1}{\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2\right]\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}} = 0.
$$

5. Si nous posons

$$
\Phi = p_1 - p_2,
$$

Φ est, par nos hypothèses, continu à la traversée de S, tandis que ses dérivées partielles par rapport à a, b, c, t peuvent être discontinues. Il vérifie d'ailleurs évidemment des équations analogues à (2), (3); ses dérivées partielles s'expriment au moyen des paramètres $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ et $\frac{d\Phi}{d\mathrm{P}}$. Il est d'ailleurs évident que

$$
\frac{d\Phi}{d\mathrm{P}} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}}.
$$

L'équation (8) montre alors que l'on a

$$\frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{\frac{d\Phi}{dP}}{\frac{dR}{dP}} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}{\frac{\partial R}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial t}-\frac{\partial p_2}{\partial t}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial t}-\frac{\partial \rho_2}{\partial t}},$$

ou encore, puisque $\rho_1 = \rho_2$,

$$(9)\qquad \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{\frac{d\Phi}{dP}}{\frac{dR}{dP}} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial t}}{\frac{\partial R}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial p_1}{\partial t}-\frac{\partial p_2}{\partial t}}{\frac{\partial \rho_1}{\partial t}-\frac{\partial \rho_2}{\partial t}}$$

Cette formule est remarquable par son parallélisme avec la formule [(18), III] relative aux ondes de choc. $\frac{d\Phi}{dP}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ sont les paramètres définissant la discontinuité subie par la pression; $\frac{dR}{dP}$ et $\frac{\partial R}{\partial t}$ sont ceux qui définissent la discontinuité subie par la densité. On voit que $\frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ s'exprime par le rapport des paramètres relatifs à la pression et à la densité. La même chose se retrouve dans la formule [(18), III] [1].

La méthode d'Hugoniot a pour objet l'évaluation du terme $\frac{\frac{d\Phi}{dP}}{\frac{dR}{dP}}$.

4. Nous supposons que l'onde S est *persistante*, c'est-à-dire qu'elle

---

[1] Ce résultat s'étend sans difficultés au cas où les dérivées premières de u, v, w, ρ, α, T, p sont continues sur S et où la discontinuité se manifeste dans les dérivées secondes. Dans ce cas, la discontinuité de p s'exprime par trois paramètres en progression géométrique de raison $-\frac{dP}{dt}$ (HADAMARD, *loc. cit.*, p. 109.) De même pour la discontinuité de ρ. La formule (9) est encore valable quand on met à la place de $\frac{\frac{d\Phi}{dP}}{\frac{dR}{dP}}$ le rapport de deux paramètres, l'un en p, l'autre en ρ, correspondants.

se propage avec une vitesse *nulle* ou *finie* (I, 3). C'est dire que $\frac{dP}{dt}$ n'est pas infini. Mais il y a lieu de distinguer les cas où il est nul de ceux où il ne l'est pas.

Si $\frac{dP}{dt}$ est nul, l'onde sépare toujours les deux mêmes masses de matière et (7) montre que

$$(10) \qquad L\frac{dU}{dP} + M\frac{dV}{dP} + N\frac{dW}{dP} = 0.$$

On dit alors que la *discontinuité dans les vitesses est transversale* (¹). Voici la raison de cette dénomination. Passons dans le champ des variables d'Euler. L'équation [(6), I], combinée avec (2), montre que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{D}\frac{dU}{dP}L, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{D}\frac{dU}{dP}M, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{D}\frac{dU}{dP}N.$$

Désignons par $\frac{dU}{dH}$ la dérivée de U suivant la normale $H(\lambda, \mu, \nu)$ à Σ. On a, par les équations précédentes et par [(9), I],

$$\frac{dU}{dH} = \lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{D}\frac{d\sigma}{ds}\frac{dU}{dP} = \frac{1}{D}\frac{L}{\lambda}\frac{dU}{dP}.$$

De même

$$\frac{dV}{dH} = \frac{1}{D}\frac{d\sigma}{ds}\frac{dV}{dP} = \frac{1}{D}\frac{M}{\mu}\frac{dV}{dP},$$

$$\frac{dW}{dH} = \frac{1}{D}\frac{d\sigma}{ds}\frac{dW}{dP} = \frac{1}{D}\frac{N}{\nu}\frac{dW}{dP}.$$

Portons dans (10). Il vient

$$\lambda\frac{dU}{dH} + \mu\frac{dV}{dH} + \nu\frac{dW}{dH} = 0.$$

Le vecteur $\overline{\frac{dU}{dH}} + \overline{\frac{dV}{dH}} + \overline{\frac{dW}{dH}}$ est donc tangent à la surface Σ, onde dans le champ des variables d'Euler.

(¹) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 117.

Si $\frac{dP}{dt}$ est différent de zéro, les équations (5) montrent que

$$(11) \qquad \frac{\frac{dU}{dP}}{L} = \frac{\frac{dV}{dP}}{M} = \frac{\frac{dW}{dP}}{N},$$

d'où l'on peut tirer :

$$\frac{\frac{dU}{d\Pi}}{\lambda} = \frac{\frac{dV}{d\Pi}}{\mu} = \frac{\frac{dW}{d\Pi}}{\nu}.$$

La discontinuité dans les vitesses est dite *longitudinale* (¹), le vecteur $\frac{\overline{dU}}{d\Pi} + \frac{\overline{dV}}{d\Pi} + \frac{\overline{dW}}{d\Pi}$ étant normal à Σ.

Il est facile de voir que, si $\frac{dP}{dt}$ est différent de zéro, les trois quantités $\frac{dR}{dP}, \frac{dA}{dP}, \frac{d\Theta}{dP}$ ne peuvent pas être nulles à la fois. S'il en était ainsi, en effet, les équations (2), (3), (5) montrent que toutes les dérivées partielles, par rapport à t, a, b, c, de R, A, Θ, U, V, W seraient nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite sur S au n° **1**.

Deuxième équation. — **5**. Considérons maintenant la *relation supplémentaire*, et, pour montrer que la méthode d'Hugoniot s'applique dans des cas très étendus, supposons que cette relation soit de la forme

$$(12) \qquad \xi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \eta \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \zeta \frac{\partial T}{\partial t} + \chi = 0,$$

ξ, η, ζ, χ étant des fonctions de ρ, α, T, a, b, c, t. Nous admettons naturellement que cette même équation est vérifiée dans le mouvement 2 comme dans le mouvement 1; on peut donc écrire (12) soit avec les indices 1, soit avec les indices 2. Traitant (12) comme on a traité (4), on trouvera

$$(13) \qquad \xi \frac{dR}{dP} + \eta \frac{dA}{dP} + \zeta \frac{d\Theta}{dP} = 0.$$

(¹) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 117.

6. Les cas où la relation supplémentaire prend la forme (12) sont très fréquents.

Quand chaque élément de masse subit des transformations adiabatiques, on a la relation [(20), I]

$$r_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + r_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

qui n'est qu'un cas particulier de (12), χ étant nul. De même, quand la température de chaque élément reste constante, l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

rentre évidemment dans (12). D'ailleurs, dans ces deux cas, il est à remarquer que les divers éléments de masse peuvent être partis d'états initiaux différents, de sorte que, en l'état initial, la masse totale peut ne pas être homogène.

Supposons que chaque élément se meuve de telle sorte que sa pression et sa densité (ou sa température et son entropie spécifiques) soient liées par une relation, ladite relation pouvant d'ailleurs varier d'un élément à l'autre. [Si le gaz était sans viscosité d'aucune espèce, ce serait là la condition [1] pour qu'il y ait une intégrale des forces vives.] Dans ce cas, la relation supplémentaire a encore la forme (12).

Supposons qu'il y ait à chaque instant, dans toute la masse, une relation

$$(14) \qquad h(p, \rho, t) = 0$$

entre la pression et la densité (ou encore entre la température et l'entropie). (Si le gaz est sans viscosité aucune, c'est la condition [2] pour la conservation du mouvement tourbillonnaire.) Dans ce cas encore, on peut écrire (12). En effet, dans (14), p est fonction de ρ, α, T, de

---

(1) Nous venons de donner deux énoncés de cette condition, l'un faisant intervenir la pression et la densité, l'autre l'entropie et la température. Dans la plupart des cas, ces deux énoncés sont équivalents. Mais le plus général est le second; il subsiste dans certains cas où le premier tombe en défaut.

(2) Même remarque que dans la note précédente.

sorte que h est fonction de ρ, α, T, t, lesquels sont fonctions de a, b, c, t. On peut donc écrire

$$\frac{\partial h}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Ainsi, par exemple, si l'on a un gaz de conductibilité infinie qu'on échauffe progressivement, la température est à chaque instant uniforme dans toute la masse, mais elle varie avec le temps. (14) est alors

$$\mathrm{T} = f(t),$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = f'(t).$$

C'est une équation (12), et l'équation (13) qu'on obtient dans ce cas est exactement la même que si chaque élément subissait des transformations isothermes.

7. Lorsqu'on a un gaz dont la conductibilité n'est ni nulle, ni infinie et où la propagation de la chaleur se fait par simple conductibilité, la relation supplémentaire n'a pas la forme (12); elle est beaucoup plus compliquée. Mais il est inutile de l'écrire pour montrer que, dans ce cas encore, on peut écrire une équation de la forme (13) [1].

Considérons la surface Σ, onde dans le champ des variables d'Euler, et de part et d'autre, à une distance h très petite, deux surfaces parallèles Σ_1 et Σ_2. Soient deux normales amb, cnd à Σ, ac et bd étant finis. La chaleur dégagée dans le temps dt par la masse comprise, au temps t, dans le volume $abcd$ tend évidemment vers zéro avec h. Or cette chaleur peut s'exprimer par l'intégrale

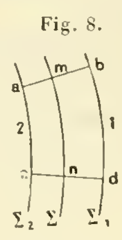
$$\int \mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}}{dn}\,ds$$

étendue à toute la surface $abdc$, K étant le coefficient de conducti-

[1] Le résultat qui va suivre est dû à M. Duhem. Nous n'avons fait que l'étendre au cas où il y a une variable chimique α.

bilité, qui est fonction de ρ, α, T, et n désignant la normale extérieure au volume $abdc$. Les éléments de cette intégrale relatifs à ab et cd tendent vers zéro avec h. Pour bd la normale n se confond avec celle que nous avons désignée par Π; pour ac c'est la normale Π en sens

Fig. 8.



inverse. D'ailleurs les valeurs de K sur ac et bd tendent vers l'égalité, puisque ρ, α, T sont continus sur Σ. Donc notre intégrale tend vers

$$\int_{mn} \mathrm{K}\left(\frac{d\mathrm{T}_1}{d\Pi} - \frac{d\mathrm{T}_2}{d\Pi}\right) ds \quad \text{ou} \quad \int_{mn} \mathrm{K}\frac{d\Theta}{d\Pi} ds.$$

Il faut que cette limite soit nulle. Or l'aire mn est quelconque, il est donc nécessaire que

$$\frac{d\Theta}{d\Pi} = 0.$$

Or $\frac{d\Theta}{d\Pi}$ est lié à $\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}}$ par une formule analogue à celle qui lie, au n° 4, $\frac{d\mathrm{U}}{d\Pi}$ et $\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{P}}$. Donc

$$(15) \qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{P}} = 0.$$

C'est une équation de la forme (13). *C'est exactement la même qu'on obtiendrait si chaque élément fluide était censé subir des transformations isothermes.*

L'équation $\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}} = 0$, jointe à (2), (3), montre que les dérivées premières de la température sont continues à la traversée de S.

Troisième équation et formule de la vitesse. — **8.** Les équations (8) et (13) sont deux équations linéaires et homogènes en $\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}}$,

$\frac{dA}{dP}, \frac{d\Theta}{dP}$. La méthode d'Hugoniot pourra s'appliquer toutes les fois qu'on pourra écrire une troisième relation de même forme

$$(16) \qquad B\frac{dR}{dP} + C\frac{dA}{dP} + D\frac{d\Theta}{dP} = 0 \quad [1].$$

Quand $\frac{dP}{dt}$ n'est pas nul, les quantités $\frac{dR}{dP}, \frac{dA}{dP}, \frac{d\Theta}{dP}$ ne peuvent pas être nulles à la fois (4). On peut donc les éliminer entre (8), (13) et (16) :

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{1}{L^2 + M^2 + N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 & \frac{\partial p}{\partial \alpha} & \frac{\partial p}{\partial T} \\ \xi & \eta & \zeta \\ B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

D'où la vitesse $\frac{dP}{dt}$.

La valeur ainsi trouvée est d'ailleurs susceptible d'une interprétation. Considérons des variations virtuelles δp, $\delta \rho$, $\delta \alpha$, δT vérifiant les équations suivantes qui dérivent par une loi évidente de (8), (13) et (16) :

$$(18) \qquad \begin{cases} \delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial p}{\partial T}\delta T, \\ \xi\,\delta\rho + \eta\,\delta\alpha + \zeta\,\delta T = 0, \\ B\,\delta\rho + C\,\delta\alpha + D\,\delta T = 0. \end{cases}$$

Éliminons $\delta\alpha$ et δT entre ces trois relations. Nous obtenons alors une équation qui, comparée à (17), montre que

$$(19) \qquad \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2}(L^2 + M^2 + N^2)\frac{\delta p}{\delta \rho}.$$

Nous avons vu, au numéro précédent, que, lorsque la conductibilité du fluide n'était pas rigoureusement nulle, l'équation (13) avait la

---

[1] On peut même employer une méthode analogue à celle d'Hugoniot dans d'autres cas (*voir* n° 29).

même forme (15) qu'elle a lorsque les mouvements de chaque élément de masse sont isothermes. La manière dont nous tirons ici $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ de (8), (13), (16) montre que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La vitesse de propagation des ondes, dans un fluide dont la conductibilité n'est ni nulle ni infinie, est exactement la même que si la conductibilité du fluide était infinie et les mouvements de chaque élément de masse isothermes. (M. Duhem.)

Tout ce qui précède s'applique au cas où il n'y a pas de variable chimique, seulement il n'y a pas dans ce cas d'équation (16). Si, par exemple, les mouvements sont adiabatiques, la vitesse des ondes est donnée par la formule (19), δp, $\delta\rho$, $\delta\alpha$, $\delta\mathrm{T}$ vérifiant les relations

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\delta\mathrm{T},$$

$$r_\rho\,\delta\rho + c\,\delta\mathrm{T} = 0,$$

ou encore par la formule (17) qui donne ici

$$(20)\qquad \frac{1}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\,\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{d\mathrm{P}'}{dt}\right)^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\,\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}.$$

C'est la *formule de Laplace*. Si le gaz a un coefficient de conductibilité différent de zéro et si la chaleur se propage par simple conductibilité, la vitesse des ondes est donnée par la formule (19), δp, $\delta\rho$, $\delta\alpha$, $\delta\mathrm{T}$ vérifiant

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\delta\mathrm{T},$$

$$\delta\mathrm{T} = 0,$$

ou par (17) qui donne ici

$$(21)\qquad \frac{1}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\,\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{d\mathrm{P}''}{dt}\right)^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

C'est la *formule de Newton*.

Ondes chimiques et ondes mécaniques. — 9. Il est intéressant

de se demander dans quelle mesure les phénomènes chimiques et les phénomènes mécaniques sont liés dans la propagation des réactions. Ce qui suit donne quelques indications à ce sujet.

Je dis que toute onde satisfaisant aux conditions exposées dans le n° **1** ne peut pas être uniquement chimique : elle doit transporter forcément une discontinuité dans les dérivées des projections de la vitesse.

Imaginons, en effet, qu'il n'y ait pas de discontinuité dans ces dérivées. Dès lors, $\frac{dU}{dP}$, $\frac{dV}{dP}$, $\frac{dW}{dP}$ seraient nuls. Par (6), on aurait donc

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{dR}{dP} + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{dA}{dP} + \frac{\partial p}{\partial T}\frac{d\Theta}{dP} = 0.$$

Réunissons cette équation à (13) et à (16). Comme il n'y a aucune raison, du moins en général, pour que le déterminant des coefficients de $\frac{dR}{dP}$, $\frac{dA}{dP}$, $\frac{d\Theta}{dP}$ soit nul, il faudrait que

$$\frac{dR}{dP} = \frac{dA}{dP} = \frac{d\Theta}{dP}.$$

Sur l'onde donc aucune des dérivées de U, V, W, R, A, Θ ne serait différente de zéro, ce qui serait contraire à nos hypothèses du n° **1**.

On dit qu'une onde S est du $n^{\text{ième}}$ ordre pour une fonction quand une au moins des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de cette fonction est discontinue sur S. On voit par ce qui précède que, si une onde S est du premier ordre pour quelques-unes des fonctions u, v, w, ρ, α, T, elle l'est certainement pour l'une des trois fonctions u, v, w.

Ce résultat se généralise-t-il et s'applique-t-il aux ondes d'ordre supérieur? Supposons que $\frac{dU}{dP}$, $\frac{dV}{dP}$, $\frac{dW}{dP}$ et, par suite, $\frac{dR}{dP}$, $\frac{dA}{dP}$, $\frac{d\Theta}{dP}$ soient nuls. L'onde S est alors au moins du second ordre pour une au moins des fonctions u, v, w, ρ, α, T. Supposons qu'elle soit en effet du second. Remarquons que, $\frac{dU}{dP}$, $\frac{dV}{dP}$, $\frac{dW}{dP}$ et par suite, vu (3), $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial W}{\partial t}$ étant nuls, toutes les dérivées partielles du second ordre de x, y, z prises en dérivant au moins une fois par rapport à t sont continues sur S. Cela étant, dérivons (4) par rapport à t et faisons sur l'équa-

tion ainsi obtenue les opérations qui conduisent de (4) à (6). On obtient ainsi

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{d\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{d\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\frac{\partial \Theta}{\partial t}}{d\mathrm{P}}\right)(\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)$$
$$=r\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}\left(\mathrm{L}\frac{d\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\mathrm{M}\frac{d\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\mathrm{N}\frac{d\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}\right).$$

Par une voie analogue, on peut remplacer (13) par

$$\xi\frac{d\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\eta\frac{d\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\zeta\frac{d\frac{\partial \Theta}{\partial t}}{d\mathrm{P}}=0,$$

et très généralement, comme on pourra s'en rendre compte sur les cas particuliers que nous traiterons plus loin, on peut écrire à la place de (16) :

$$\mathrm{B}\frac{d\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\mathrm{C}\frac{d\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}}{d\mathrm{P}}+\mathrm{D}\frac{d\frac{\partial \Theta}{\partial t}}{d\mathrm{P}}=0.$$

Ces trois formules permettent de montrer que l'une au moins des fonctions $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ doit avoir des dérivées discontinues à la traversée de S.

Il est évident que le même raisonnement s'appliquerait aux ondes d'ordre supérieur.

§ 2. — Propagation d'une réaction dans un état d'équilibre.

10. Le problème physique que nous avons en vue est le déplacement d'une onde S propageant une réaction chimique (mouvement 2) dans un gaz où il ne s'en produit aucune (mouvement 1). Il faut donc que la réaction chimique commence dans chaque élément fluide aussitôt après qu'il a été traversé par la surface S. Comme, au passage de cette surface, ρ, α, T ne subissent aucun saut brusque (**I**), il est nécessaire que, dans le mouvement 1, juste avant d'être atteint par S,

chaque élément se trouve dans un état tel que la réaction puisse s'y produire. S'il n'y a aucun frottement, qu'il y ait ou non viscosité, cet état doit être représenté par un point situé sur la surface des équilibres véritables; si, au contraire, il y a frottement, il doit être représenté par un point situé sur la surface des faux équilibres limites ([1]). Nous commencerons par supposer que, *dans toute la partie* 1, le fluide est dans un tel état et *que le mouvement* 1 *se réduit à un équilibre véritable ou faux et limite*. Nous étudierons ainsi un problème simple, la propagation d'une réaction dans un milieu préparé pour sa production. Ce sera l'objet du présent paragraphe. Il n'est d'ailleurs pas indispensable que l'état du fluide dans la région 1 soit homogène.

Évidemment, puisqu'il y a équilibre dans 1, on a

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0.$$

On peut néanmoins avoir une relation supplémentaire de la forme (12) vérifiée à la fois dans 1 et dans 2, mais il faut que $\chi = 0$. C'est ce qui arrive par exemple si les mouvements sont *adiabatiques* ou *isothermes*. On peut alors écrire une équation (13).

1° Il n'y a ni viscosité ni frottement. — **11.** Faisons d'abord l'hypothèse — tout à fait théorique pour le moment, mais nous en tirerons parti plus tard — qu'il n'y a ni viscosité ni frottement correspondant à la variable α [$\varphi = 0$ (I, **10**)], de sorte que, même dans le mouvement, le point représentatif de l'état d'un élément ne quitte pas la surface des équilibres véritables, ρ, α, T vérifiant sans cesse la relation

$$g(\rho, \alpha, T) = 0 \tag{22}$$

([1]) Le cas où il y a frottement comprend, dans notre pensée, celui où le frottement chimique n'est qu'apparent, mais où la surface (A) existe (I, 7). Nous avons déjà dit que nous adopterions, dans ce cas, le langage de la théorie des faux équilibres et que nous traiterions (A) comme (a). On voit bien ici que cette manière de faire est légitime si les vitesses de réaction avant la surface (A) sont négligeables eu égard à la vitesse de propagation de S.

qui n'est autre que $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = 0$ si l'on introduit le potentiel interne. On a donc

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = 0,$$

et cette égalité peut s'écrire avec les indices 1 comme avec les indices 2 : avec les indices 1 elle se réduit à une identité. En la traitant alors comme (4), on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0,$$

ou, par les équations analogues à (3) que vérifient R, A, Θ,

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\Theta}{\partial \mathrm{P}} = 0. \tag{23}$$

C'est une équation de la forme (16). Comme (8) et (13) sont vraies, on voit que les formules (17) ou (19) sont applicables ici. Si les mouvements sont adiabatiques, elles donnent pour la vitesse de l'onde

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 \\ &\quad = \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}} + \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\right)\frac{r_\rho\frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}} - c\frac{\partial g}{\partial \rho}}{c\frac{\partial g}{\partial \alpha} - r_\alpha\frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}}. \end{aligned} \right.$$

Si les mouvements sont isothermes, on a au contraire

$$\frac{1}{\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{\partial p}{\partial \alpha}\frac{\frac{\partial g}{\partial \rho}}{\frac{\partial g}{\partial \alpha}}. \tag{25}$$

12. Les formules (24) et (25) donnent $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ par son carré. Il est intéressant de se demander si ce carré est positif [1].

[1] L'idée de rattacher la réalité de la vitesse de propagation à la stabilité de l'équilibre est due à M. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité et Acoustique*, t. I, 1891, p. 83 et 143.

Précisons. Nous supposons, avons-nous dit, que le mouvement 1 est un état d'équilibre dans lequel les variables ont les valeurs ρ_1, α_1, T_1. Dans cette masse en équilibre se propage une onde transportant, pour fixer les idées, *un mouvement adiabatique*. Nous admettrons, en outre, que l'équilibre de la masse est stable au regard des mouvements *adiabatiques isobares*. Je dis que, dans ces conditions, $\frac{dP}{dt}$ de la formule (24) est réel.

Nous pouvons en effet prendre pour définition de la stabilité adiabatique isobare *une des lois du déplacement adiabatique de l'équilibre par variation de pression*, et admettre que tout accroissement de pression δp, appliqué à un élément censé enfermé dans une enveloppe imperméable à la chaleur, provoque dans cet élément une transformation $\delta\rho$, $\delta\alpha$, δT réversible, c'est-à-dire située sur la surface des équilibres véritables, telle que $\delta p\,\delta\rho > 0$. Les $\delta\rho$, $\delta\alpha$, δT ainsi provoqués sont déterminés par les équations

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial p}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial p}{\partial T}\delta T,$$

$$r_\rho\,\delta\rho + r_\alpha\,\delta\alpha + c\,\delta T = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial g}{\partial T}\delta T = 0,$$

qui sont précisément les équations (18) convenant au cas qui nous occupe. Les δp et les $\delta\rho$ en cause ici sont donc exactement ceux qui figurent dans (19), et, puisque $\delta p\,\delta\rho > 0$, on voit que $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ est positif.

Si l'onde avait transporté un mouvement *isotherme*, il eût fallu raisonner en supposant l'équilibre stable au regard des modifications isothermes et isobares et en exprimant cette stabilité par la condition que $\delta p\,\delta\rho$ est positif lors de tout accroissement de pression δp appliqué à un élément censé maintenu à température constante.

15* Cette manière de définir la stabilité par les lois du déplacement de l'équilibre ne choquera pas sans doute les expérimentateurs ([1]). Elle

---

([1]) Duhem, *Considérations sur la stabilité et particulièrement sur la stabilité des corps élastiques* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 25 juin 1903).

présente toutefois quelques inconvénients. Outre qu'elle montre mal le lien qui existe logiquement entre le déplacement de l'équilibre *par variation de pression* et la stabilité *isobare*, elle est beaucoup moins rigoureuse que celle à laquelle les mécaniciens sont habitués depuis Lejeune-Dirichlet. Mais nous pouvons adopter cette dernière, à la condition de faire intervenir la notion de potentiel interne, et ce n'est pas là un des moindres mérites de cette notion. Nous avons affaire ici à un système défini par des variables sans viscosité ; la condition nécessaire et suffisante d'équilibre stable est donc, cela est aujourd'hui démontré pour des cas très étendus, que le potentiel soit minimum.

Nous ferons en passant la remarque, qui nous sera utile plus tard, que cette condition est encore nécessaire et suffisante si l'on admet l'existence d'une viscosité relative à α ; on a alors, en effet, deux sortes de variables, les unes x, y, z (et par suite ρ) affectées d'inertie et non de viscosité, l'autre α affectée de viscosité et non d'inertie. On est ainsi dans un cas déjà traité ([1]).

Nous partirons de l'hypothèse que l'équilibre d'un élément est stable *quand sa température est maintenue constante et qu'il est soumis à sa périphérie à une pression constante.* La différentielle seconde du potentiel total $\mathfrak{F} + \frac{p}{\rho}$, où p et T sont constants, est alors positive. Donc, en tenant compte de [(17'), 1],

$$(26) \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \rho}\right) \delta\rho^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \rho\, \partial \alpha} \delta\rho\, \delta\alpha + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha^2} \delta\alpha^2 > 0.$$

La vitesse d'une onde propageant un mouvement *isotherme* est donnée par (19), δp et $\delta\rho$ vérifiant les équations (18) qui se réduisent

---

([1]) Duhem, *Stabilité et viscosité* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 6e série, t. III, 1903).

En appliquant à des masses fluides continues des résultats démontrés pour des systèmes définis par un nombre fini de paramètres, nous dépassons ce qu'autorise la rigueur mathématique. Il est permis toutefois, au point de vue physique, de le faire, en attendant mieux.

Nous laissons aussi de côté les singularités signalées par M. Painlevé (*Comptes rendus*, t. CXXXVIII, 1904, p. 1555).

ici à

$$\delta p = \left(\rho^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}\right) \delta \rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial \alpha} \delta \alpha,$$

$$o = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial \alpha} \delta \rho + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} \delta \alpha.$$

Multiplions respectivement ces équations par $\delta\rho$, $\rho^2 \delta\alpha$. Il vient, vu (26),

$$\delta p\, \delta \rho > o$$

ou encore

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} > o;$$

$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ est donc positif.

La vitesse d'une onde propageant un mouvement *adiabatique* est donnée par (19), δp et $\delta\rho$ vérifiant dans ce cas les équations (18) suivantes :

$$\delta p = \left(\rho^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}\right) \delta \rho + \rho^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial \alpha} \delta \alpha + \rho^2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial T} \delta T,$$

$$o = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial \alpha} \delta \rho + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} \delta \alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial T} \delta T,$$

$$o = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial T} \delta \rho - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\, \partial T} \delta \alpha - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2} \delta T.$$

Multiplions ces équations respectivement par $\delta\rho$, $\rho^2\delta\alpha$, $\rho^2\delta T$ et ajoutons

$$\frac{\delta p\, \delta \rho}{\rho^2} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}\right) \delta \rho^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial \alpha} \delta \rho\, \delta \alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} \delta \alpha^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2} \delta T^2.$$

Or $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}$ est négatif (postulat de Helmholtz). Donc $\delta p\, \delta\rho$ $\Big($et, par suite, $\frac{\delta p}{\delta \rho}\Big)$ est positif en vertu de (26). $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ est donc encore positif dans ce cas.

On remarquera que l'intervention du postulat de Helmholtz nous a permis d'étudier la réalité de $\frac{dP}{dt}$ à la fois dans le cas des mouvements isothermes et dans celui des mouvements adiabatiques, en faisant la seule hypothèse de la *stabilité isotherme*. Il n'y a pas à s'en étonner,

car on sait que, en vertu de ce postulat, la stabilité isotherme entraîne la stabilité adiabatique. Avec la seule hypothèse de la stabilité adiabatique, on pourrait montrer seulement que le $\frac{dP}{dt}$ de la formule (24) est réel, mais non qu'il en est de même de celui de (25). On voit que la notion de potentiel interne permet d'établir un lien entre les deux stabilités et par suite entre les signes des deux $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$, ce que ne permettent pas les considérations de l'article **12**.

14. Lorsqu'il n'y a, comme nous le supposons ici, ni viscosité, ni frottement, il est impossible (cela ressort très nettement de tout ce qui précède) de distinguer entre les ondes propageant un ébranlement mécanique et celles qui propagent un phénomène chimique : une onde propage toujours à la fois l'un et l'autre. La vitesse obtenue dans l'hypothèse des mouvements adiabatiques [form. (24)] est aussi bien la vitesse du son dans un tel milieu que la vitesse de propagation de la réaction : propagation du son et propagation adiabatique d'une réaction chimique sont un seul et même problème.

Il est intéressant de comparer la vitesse (24) avec celle qu'aurait le son dans un fluide qui ne serait le siège d'aucun phénomène chimique, mais qui présenterait les mêmes coefficients de compressibilité et de dilatation, les mêmes chaleurs de dilatation et les mêmes chaleurs spécifiques que le mélange explosif considéré. Dans un tel fluide le son avancerait avec la vitesse $\frac{dP'}{dt}$ donnée par (20). On voit que

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP'}{dt}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}-\frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}-\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial p}{\partial T}\right)}{\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T}-\frac{\partial g}{\partial \alpha}}, \end{aligned}\right.$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP'}{dt}\right)^2 - \frac{\partial_{Q.\alpha}g\,\partial_{Q.\rho}p}{\partial\rho\,\partial_{Q.\rho}g}.$$

$\delta_{Q,\rho} g$ est la variation subie par la fonction g dans une modification *adiabatique* $\delta\alpha$, δT s'effectuant à ρ constant. Les autres notations analogues ont une signification analogue.

Supposons que les états de véritable équilibre $g = 0$ soient stables quand le système est enfermé dans une enceinte imperméable à la chaleur et de volume constant. Nous prendrons pour définition de la stabilité la propriété suivante du déplacement de l'équilibre par variation de densité. Partons d'un état d'équilibre; augmentons adiabatiquement la densité ($\delta\rho > 0$) et supposons que d'abord la réaction chimique ne se produise pas ou se produise très peu (on est très près de la surface d'équilibre). Nous admettrons, pour fixer les idées et uniquement pour cela, que cette opération nous conduit dans la région de combinaison. Fixons alors la densité à la valeur $\rho + \delta\rho$, laissant toujours le corps dans son enceinte imperméable à la chaleur. La réaction se produit alors et nous admettrons : 1° qu'elle tend à faire diminuer la pression; 2° qu'elle ramène le corps à un nouvel état d'équilibre.

Cette définition peut s'exprimer de la façon suivante : La compression $\delta\rho > 0$ nous fait pénétrer dans une région où g est positif : on doit donc avoir $\delta_{Q,\alpha} g > 0$. La réaction subséquente, qui est adiabatique et à volume constant, a pour effet de faire baisser la pression : cela veut dire $\delta_{Q,\rho} p < 0$, et cette réaction ramène sur la surface des équilibres, c'est-à-dire fait passer g d'une valeur positive à une valeur nulle : donc $\delta_{Q,\rho} g < 0$.

Par suite, le terme $-\dfrac{\delta_{Q,\alpha} g \, \delta_{Q,\rho} p}{\delta\rho \, \delta_{Q,\rho} g}$ est négatif et $\dfrac{dP}{dt}$ est plus petit que $\dfrac{dP'}{dt}$.

15. Ainsi, en prenant pour définition de la stabilité les lois du déplacement de l'équilibre, nous pouvons comparer $\dfrac{dP}{dt}$ et $\dfrac{dP'}{dt}$ sans faire appel à la notion de potentiel interne. Mais nous sommes obligés néanmoins de parler, au moins dans une certaine mesure, de réactions arrêtées, de véritables modifications virtuelles, puisque nous supposons que, dans la compression $\delta\rho$, la composition chimique commence par ne pas varier. Dès lors il n'y a plus grand avantage à se passer des

simplifications et des clartés qu'apporte l'usage du potentiel interne. Recourons-y donc. La formule (27) s'écrit alors

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 &= \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\cdot\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP'}{dt}\right)^2 \\ &\quad -\rho^2\frac{\left(\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\rho\,\partial\alpha}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}-\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\rho\,\partial T}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial T}\right)^2}{\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}\left[\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}-\left(\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial T}\right)^2\right]}.\end{aligned}\right.$$

L'énergie interne $U = \mathcal{F} - T\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial T}$ peut être considérée comme une fonction ε de α, ρ et de l'entropie s. Laissons ρ et s constants; ε n'est plus fonction que de α. On sait que la condition $\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial\alpha^2} > 0$ est une condition suffisante pour la stabilité adiabatique sous volume constant ([1]). Admettons qu'elle est aussi nécessaire. Il est facile de voir qu'elle peut s'écrire

$$\frac{1}{\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}}\left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}-\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial T}\right)^2\right] > 0.$$

Si donc l'équilibre d'un élément est stable dans les conditions que nous venons de dire, l'équation (28) montre que $\dfrac{dP}{dt} < \dfrac{dP'}{dt}\cdot$ C'est le résultat obtenu autrement au numéro précédent.

Mais on peut arriver au même résultat en partant de l'hypothèse que l'équilibre d'un élément est stable au regard des modifications isothermes et isobares, hypothèse exprimée par l'inégalité (26). En effet, par cette inégalité, qui est vraie quels que soient $\delta\rho$ et $\delta\alpha$, $\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}$ est positif et, par le postulat de Helmholtz, $\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}$ est négatif; le second terme du second membre de (28) est donc négatif. Le fait que cette nouvelle hypothèse sur la stabilité conduit à la même consé-

---

([1]) *Voir* GIBBS, *Équilibre des systèmes chimiques* (traduction Le Chatelier), p. 2 et suiv. — *Voir* aussi *Sur la rupture et le déplacement de l'équilibre* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 juin 1902).

quence que la première n'a pas de quoi surprendre, car on sait que la stabilité isothermique entraîne la stabilité adiabatique et que la stabilité isobare entraîne la stabilité sous volume constant ([1]).

2° Il y a viscosité ou frottement ou les deux ensemble. — 16. Venons maintenant au cas où la viscosité et le frottement relatifs à α ne sont plus négligeables. L'équation (13) peut toujours, comme il a été dit au n° **10**, être vérifiée. Mais peut-on écrire une relation de la forme (16)?

Ici l'équation (22) n'est pas vraie dans le mouvement 2. Mais [(19), I] montre que, à la traversée de S, $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ ne peut présenter de discontinuité, puisque ρ, α, T sont continus. $\left(\text{Dans le cas qui nous occupe } \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = 0\text{, puisque le fluide est en équilibre dans la région 1; donc, immédiatement en arrière de S, } \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0\right)$. Sur S donc, on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

et par suite, vu (3),

$$\frac{dA}{dP} = 0. \tag{29}$$

C'est une équation de la forme (16).

Par conséquent on peut calculer la vitesse de propagation d'une onde par les formules (17) ou (19), et l'on trouve, si les mouvements sont adiabatiques,

$$\frac{1}{L^2 + M^2 + N^2} \frac{r^2}{\rho^2} \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c} \frac{\partial p}{\partial T}; \tag{30}$$

si les mouvements sont isothermes,

$$\frac{1}{L^2 + M^2 + N^2} \frac{r^2}{\rho^2} \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \tag{31}$$

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 23 juillet 1903).

Or ce sont là précisément les formules de *Laplace* (20) ou de *Newton* (21) relatives aux fluides sans variable chimique.

17. (30) et (31) s'appliquent dans les deux cas suivants :

1° *Le mélange gazeux est affecté de viscosité sans frottement.* Dans la partie 1, le corps est alors en équilibre vrai, et dans cet état d'équilibre se propage un ébranlement qui est forcément à la fois mécanique et chimique. Propagation du son et propagation adiabatique d'une réaction ne sont dans ce cas qu'un même phénomène [form. (30)].

2° *Le mélange gazeux est affecté de frottement et de viscosité.* Dans la partie 1, ce mélange doit être alors en état de faux équilibre limite. Dans ce cas, il peut se présenter des ondes purement mécaniques et des ondes à la fois chimiques et mécaniques. Prenons, en effet, pour fixer les idées, les mouvements adiabatiques sur l'arc εB et

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} > 0.$$

Nous savons alors (**I, 6**) que la réaction n'entre en jeu à partir d'un équilibre limite que si le fluide est *comprimé*. Par conséquent, les ondes propageant une compression seront à la fois mécaniques et chimiques; au contraire, les ondes propageant une dilatation seront mécaniques seulement [1].

Mais, *dans tous les cas*, la vitesse des ondes, qu'elles soient chimiques et mécaniques ou purement mécaniques, est toujours la même; si les mouvements sont adiabatiques, *c'est toujours celle qu'aurait le son dans un fluide par qui ne serait le siège d'aucune réaction et qui présenterait les mêmes coefficients de compressibilité et de dilatation, les mêmes chaleurs de dilatation et les mêmes chaleurs spécifiques que le mélange fluide considéré.*

---

[1] Dans le mouvement 2, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ n'a pas partout le même signe. Nous disons que l'onde propage une compression quand $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ est positif *immédiatement en arrière de la surface* S. De même, une onde est *chimique* si, *immédiatement en arrière de* S, il y a réaction chimique.

18*. Pouvons-nous traiter de la réalité de cette vitesse (¹)? Encore ici cette réalité peut se rattacher à la stabilité. Dans le premier des cas ci-dessus (viscosité sans frottement) la stabilité isotherme et isobare est encore exprimée, nous l'avons expressément remarqué au n° **15**, par (26). On peut faire, en particulier, $\delta\alpha = 0$ dans (26) et, en reproduisant le mode de raisonnement du n° **15**, on verra que $\frac{(\delta p)_{\Theta,\alpha}}{\delta\rho}$ est positif.

Dans le second cas, (26) n'est plus vérifiée si l'on y laisse subsister $\delta\alpha$; mais elle l'est si l'on y fait $\delta\alpha = 0$. En effet, un état de faux équilibre aussi voisin qu'on veut de l'état d'équilibre limite est stable au regard des modifications isothermes laissant α constant. C'est donc qu'en cet état $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\rho}\right)\delta\rho^2 > 0$. Il est tout naturel (quoique peut-être non entièrement démontré) de supposer que cette inégalité est encore vérifiée dans l'état de faux équilibre limite. Dès lors le second cas se traite comme le premier.

3° Cas des corps à réaction vive. — 19. Venons maintenant au cas des corps *à réaction vive*. C'est celui qu'a traité M. Duhem (*Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 1896, p. 168, et *Traité élémentaire de Mécanique chimique*, t. I, 1897, p. 280). M. Duhem a présenté ce cas comme résultant de l'hypothèse suivante : *Il n'y a pas de viscosité et le frottement est indépendant de* $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$. Il résulte évidemment de là que le point représentatif de l'état du fluide reste toujours sur la surface des faux équilibres limites [*voir* équation (19'), I].

L'absence totale de viscosité étant assez peu probable, nous croyons préférable de nous en tenir à la manière dont nous avons présenté les choses (I, 8), manière qui nous paraît avoir un sens physique plus net que l'hypothèse trop purement mathématique de M. Duhem.

Comme conséquence, notre exposé présentera quelques divergences de détail avec celui de ce savant. Nous sommes obligés d'éliminer, pour

(¹) Nous allons traiter la question en employant le potentiel interne. On pourrait aussi la traiter par des considérations analogues à celles des n°s 12 et 14.

être traités dans le Chapitre suivant, les cas où les réactions sont pour ainsi dire instantanées. Nous ne prenons ici que ceux où les réactions maintiennent le point représentatif sur la surface $g = 0$. Nous savons que cela peut arriver aussi bien pour l'arc $A\varepsilon$ que pour l'arc εB de cette surface. Le problème se met alors en équations exactement comme au n° **11**, seulement $g = 0$ représente ici *la surface des faux équilibres limites*. Nous parvenons ainsi, suivant que les mouvements sont adiabatiques ou isothermes, à la formule (24) ou à la formule (25).

L'identité de notations que nous venons de trouver entre le problème que nous traitons ici et celui des nos **11** à **15** peut devenir une véritable identité de fait. Aux hautes températures en effet la surface des faux équilibres limites tend à se confondre avec celle des équilibres véritables, de sorte que $g = 0$ est alors aussi bien l'équation de l'une que de l'autre. Aux hautes températures, nos deux problèmes se confondent donc.

20. Au sujet de la distinction entre les ondes purement mécaniques et les ondes à la fois chimiques et mécaniques, les corps *à réaction vive* donnent lieu à des remarques analogues à celles qui ont été faites pour les corps avec frottement et vitesses de réaction modérées (**17**). Prenons, pour fixer les idées, les mouvements adiabatiques sur l'arc εB. Si

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} > 0,$$

les ondes *condensées* $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0\right)$ propagent à la fois une réaction et un phénomène mécanique; les ondes *dilatées* $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0\right)$ ne propagent qu'un phénomène mécanique. Mais ici les premières n'ont pas la même vitesse que les secondes; elles ont la vitesse (24), tandis que les secondes ont la vitesse (20) (formule de Laplace).

Cette distinction toutefois ne subsiste pas aux hautes températures, quand (a) et (a') sont venus se confondre avec (V). Il est naturel d'admettre que la vitesse de réaction dans la région F' est très grande comme dans la région F, de sorte que jamais le point représentatif ne

puisse, en pénétrant dans cette région, s'éloigner sensiblement de (a'), pas plus qu'il ne peut, dans la région F, s'éloigner sensiblement de (a). Comme (a) et (a') sont maintenant confondues avec (V), on voit que le point représentatif ne quittera pas (V), mais on voit aussi que ni une compression ni une dilatation ne pourront laisser α constant, la région E des faux équilibres n'existant pas; si la compression provoque l'accroissement de α, la dilatation en provoquera la diminution. Nous retombons exactement sur la théorie des nos **11** à **15** où la distinction est impossible entre les ondes mécaniques et les ondes chimiques.

21. Comparons la vitesse (24) avec la vitesse (20) pour voir quelle influence a la réaction chimique sur la propagation d'une onde. C'est exactement la comparaison du n° **14**, mais dans le cas où $g = 0$ est la surface (a). Elle se fait au moyen de la formule (27).

Nous sommes, par hypothèse, sur l'arc εB. Donc $\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}$ est positif. Dans l'expression $\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial T}\frac{r_\alpha}{c}$, on peut admettre, vu la grandeur du coefficient r_α pour les mélanges explosifs, que c'est le second terme qui donne son signe. Or ce signe est le signe +, $\frac{\partial p}{\partial T}$ étant, en général, positif et r_α étant négatif [(21), I]. Donc $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ sera plus grand ou plus petit que $\left(\frac{dP'}{dt}\right)^2$ suivant que $\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T}$ sera supérieur ou inférieur à zéro, c'est-à-dire suivant que les ondes propageant la réaction chimique seront des ondes *condensées* $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0\right)$ ou *dilatées* $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0\right)$. Dans le premier cas, on peut être assuré que $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ est positif, car $\left(\frac{dP''}{dt}\right)^2$ l'est déjà (**18**). Dans le second, on ne peut rien dire de général [1].

Quand les surfaces (a) et (a') sont venues se confondre avec (V), $\frac{dP}{dt}$ est toujours, comme on l'a vu (**14**), inférieur à $\frac{dP'}{dt}$.

---

[1] *Voir* DUHEM, *Mécanique chimique*, t. I, p. 280 et suiv. Dans sa discussion, M. Duhem est obligé de faire des hypothèses particulières, notamment de supposer que le coefficient de frottement ne dépend pas de ρ.

On voit par cette comparaison que le cas des corps à réaction vive, contrairement à celui du n° **16**. fait jouer un rôle à une élasticité spéciale, d'ordre chimique, qui peut soit s'ajouter à l'élasticité mécanique, soit s'en retrancher. Nous sommes portés à croire que, pour les états de faux équilibre limite dont la température n'est pas très élevée, on a

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial g}{\partial T} > 0,$$

de sorte que, pour eux, c'est d'une addition d'élasticité qu'il s'agit. La vitesse de propagation peut prendre alors des valeurs très considérables, puisque, pour les points de l'arc εB voisins de ε, la quantité placée au dénominateur $\frac{r_\alpha}{c}\frac{\partial g}{\partial T} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}$ est très petite. Aux hautes températures, au contraire nous retombons sur la théorie des n^{os} **11** à **15** et les élasticités se retranchent. En considérant ainsi ladite théorie comme un cas particulier de celle des corps à réaction vive, il nous semble que nous lui donnons une *signification physique*, dont elle manquait jusqu'ici. Nous avions annoncé ce résultat aux premières lignes du n° **11**.

22. A la vérité les résultats de l'article **16** doivent s'appliquer au cas des corps à réaction vive qui ne se distinguent des corps étudiés dans cet article que par le resserrement des surfaces d'égale vitesse de réaction, distinction qui est sans importance de principe. Il est certain qu'une réaction chimique adiabatique se propageant dans un état d'équilibre par une onde véritable ne peut avancer qu'avec la vitesse du son [formule (30)]. Comment se fait-il alors que la formule (24) donne une vitesse qui peut être beaucoup plus forte?

C'est que nous avons traité le problème par une méthode d'approximation, en considérant comme rigoureux que l'équation

$$g(\rho, \alpha, T) = 0$$

est toujours vérifiée dans le mouvement 2, alors qu'elle ne l'est qu'à peu près. Nous avons ainsi transformé le problème réel en un problème fictif qui en est la représentation simplifiée. Dans cette modification, nous avons changé en *ondes véritables* des phénomènes qui n'étaient,

pour employer la terminologie de M. Duhem, que des *quasi-ondes* dans le problème vrai et qui, par suite, n'étaient pas soumis à la loi (30). En réalité, quand la réaction se propage suivant la loi (24), voici ce qui se passe. Dans toute l'étendue du fluide la réaction est amorcée, mais aux points éloignés elle est insensible, tandis qu'aux points rapprochés elle est notable. De là deux régions séparées par une zone qui n'est pas rigoureusement une surface, mais qui est très étroite. Cette zone constitue une quasi-onde qui se propage autrement qu'une onde véritable, et notre méthode approximative, en transformant cette quasi-onde en onde mathématique, nous permet de trouver la loi de son mouvement.

Faits d'expérience. — **25.** De tous les cas étudiés dans le présent paragraphe, aucun n'a été soumis à une expérimentation systématique, et il est probable même qu'on n'en a observé accidentellement qu'un seul, celui où un ébranlement se propage dans un système chimique en équilibre, la variable α étant affectée de viscosité et non de frottement (**17**). Ce serait le cas, par exemple, de la propagation du son dans un mélange d'hydrogène, de vapeur d'iode et d'acide iodhydrique à une température assez élevée. La formule (30) montre que la vitesse du son n'est pas affectée par la réaction chimique [1].

Quand il y a frottement, les théories précédentes supposent que le corps, dans la région 1, est en état de faux équilibre limite. C'est là une condition qu'on n'a probablement jamais réalisée, et il est peu probable qu'on la réalise jamais. Tout au plus pourrait-on espérer expérimenter le cas, relatif aux corps à réaction vive, où, par suite des hautes températures, la théorie du n° **19** coïncide avec celle du n° **11** et mettre en évidence la diminution d'élasticité, c'est-à-dire de vitesse dans la propagation des ondes, qui résulterait de la réaction chimique. Nous avons toutefois tendance à croire que cette diminution est très faible (*Voir* Chap. III, n° **57**).

---

(1) Mais il ne faut pas oublier que cette conclusion est intimement liée à l'hypothèse exprimée par [(19) I]. Si la vitesse de réaction dépendait de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, elle ne subsisterait pas.

Quant à la théorie du n° **11**, c'est sans doute uniquement dans le seul cas que nous venons de signaler qu'on peut songer à la soumettre à des vérifications expérimentales.

Malgré tout, les développements qui précèdent ne sont pas sans intérêt, car ils mettent en évidence, dans des cas idéalement simplifiés, le rôle de la réaction chimique, que nous allons retrouver dans ce qui va suivre.

§ 3. — Propagation d'une réaction dans un mouvement.

24. Prenons un mélange gazeux où la variable α présente du frottement et supposons ce corps en état de faux équilibre, mais non limite. Comment une réaction peut-elle s'y propager?

Il faut naturellement que le gaz soit d'abord porté à sa température d'inflammation par un mouvement préalable, et par le mot *mouvement* nous désignons toute espèce de transformation, même, si c'est nécessaire, une simple variation de température sans déplacement. Nous sommes ainsi conduits à examiner la propagation d'un mouvement 2 dans un mouvement 1 qui ne se réduit pas, comme au paragraphe précédent, à un état d'équilibre.

1° Les mouvements 1 et 2 sont de même nature. — 25. Dans le problème que nous venons de spécifier au numéro précédent, le mouvement 1 doit être tel que la variable α n'y joue pas ; le mouvement 2, au contraire, doit être accompagné de phénomènes chimiques. Nous traiterons ce problème un peu plus loin et nous commencerons ici par supposer qu'il y a réaction à la fois dans 1 et dans 2.

Il est évidemment nécessaire que la réaction soit *de même sens* dans 1 et dans 2 au voisinage de l'onde S. Il est nécessaire aussi que la *même relation supplémentaire* soit valable dans 1 et dans 2 pour qu'on puisse écrire une équation (13). Abandonnons ici les généralités d'un ordre un peu trop mathématique auxquelles nous nous sommes tenus jusqu'à présent, et considérons les deux seuls cas vraiment intéressants au point de vue physique : celui où les mouvements sont adiabatiques, et où, par suite, l'équation (13) a la forme

$$r_\rho \frac{dR}{dP} + r_\alpha \frac{dA}{dP} + c \frac{d\Theta}{dP} = 0, \tag{32}$$

et celui où la propagation de la chaleur se fait par simple conductibilité dans un gaz à coefficient de conductibilité non nul, et où (13) s'écrit

$$\frac{d\Theta}{dV} = 0. \tag{33}$$

Ce dernier cas, que nous distinguerons en disant que le gaz est *bon conducteur*, comprend comme cas particulier celui où la conductibilité est infinie, et nous savons, par le théorème du n° **8**, que la vitesse des ondes dans un gaz bon conducteur se calcule exactement comme si les mouvements étaient assujettis à être isothermes. L'équation (13) ayant l'une des formes que nous venons de dire, il est évident qu'on peut conserver sans modification les théories des n^{os} **11**, **16**, **19**. On peut donc considérer comme résolus par ces théories les problèmes suivants :

1° *La variable α est sans frottement ni viscosité; un mouvement avec réaction 2 se propage dans un mouvement avec réaction* 1.

Si les mouvements sont adiabatiques, la vitesse de l'onde est donnée par la formule (24); si le gaz est bon conducteur, elle est donnée par la formule (25), puisqu'on doit la calculer comme si les mouvements étaient isothermes.

D'ailleurs ce qui a été dit sur le signe de $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ subsiste puisque l'hypothèse de l'absence de frottement et de viscosité revient à admettre que chaque élément est toujours en équilibre au point de vue de la densité et de la variable chimique; on peut donc parler de la stabilité de son état.

2° *La variable α est affectée de viscosité avec ou sans frottement, et un mouvement avec réaction se propage dans un autre mouvement avec réaction.*

La théorie du n° **16** est applicable. La vitesse des ondes est donnée, quand les mouvements sont adiabatiques, par la formule de Laplace (30), et, quand le gaz est bon conducteur, par la formule de Newton (31).

Il est impossible ici de faire appel aux notions de stabilité pour discuter le signe de $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$, puisque le gaz n'est plus en équilibre dans 1.

Mais on peut affirmer que ce signe est le signe + pour les mélanges de gaz parfaits. Un mélange de gaz parfaits qui n'est le siège d'aucune réaction chimique se comporte, c'est la loi du mélange des gaz, comme un gaz parfait unique; ses coefficients de compressibilité, de dilatation, d'échauffement, ont des valeurs numériques comparables à celles des gaz parfaits simples. Depuis Gibbs, on sait que cette propriété subsiste pour les mélanges dont les constituants peuvent se combiner entre eux. Ces valeurs numériques sont telles, on le sait par l'expérience, que les formules de Laplace et de Newton donnent des vitesses réelles.

3° *Corps à réaction vive. Un mouvement avec réaction se propage dans un autre mouvement avec réaction, le point représentatif restant sur la surface $g = 0$.*

Nous pouvons appliquer le n° **19**. La vitesse est donnée, si les mouvements sont adiabatiques, par (24), et, si le gaz est bon conducteur, par (25).

26. *Faits d'expérience.* — Des trois cas précédents, il est probable que le second seul a été observé par les expérimentateurs, mais il n'est pas douteux qu'il l'ait été : c'est en effet le cas, qui s'est certainement présenté souvent, de *la propagation du son dans un fluide en train de se transformer chimiquement*. Il y a même sur ce sujet des expériences systématiques, celles de M. Berthelot sur les vibrations de l'ozone, par exemple, pendant qu'il se transforme en oxygène ([1]). M. Berthelot n'a pas mesuré la vitesse du son dans ces conditions. Mais notre théorie montre qu'il aurait trouvé, s'il l'avait fait, que la réaction chimique n'a pas, dans ce cas, d'influence sur cette vitesse ([2]).

2° Le mouvement 1 est un mouvement sans réaction chimique. —

27. Nous allons supposer maintenant que la variable α ne joue pas dans

---

([1]) Berthelot, *Sur la force des matières explosives*, t. I, 1883, p. 126 et suivantes.

([2]) Il est vrai que cette conclusion tient en grande partie à l'hypothèse exprimée par l'équation [(19) I].

1, mais qu'elle joue dans 2; c'est là proprement le cas de la propagation d'une flamme dans un gaz.

Ce phénomène peut se présenter dans deux cas.

28. 1° *Variable α affectée de viscosité et de frottement.* — La méthode de calcul suivie au n° **16** est encore applicable quand le mouvement 1 est purement mécanique. Si les mouvements sont adiabatiques, on a, dans 1 comme dans 2,

$$r_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + r_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = 0;$$

seulement dans 1 le second terme est nul. Cela n'empêche pas d'écrire

$$r_\rho \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{P}} + r_\alpha \frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{P}} + c \frac{d\Theta}{d\mathrm{P}} = 0.$$

De même, si le gaz est bon conducteur, on a toujours

$$\frac{d\Theta}{d\mathrm{P}} = 0.$$

La vitesse des ondes est donnée, si les mouvements sont adiabatiques, par (30) (formule de Laplace) et, si le gaz est bon conducteur, par (31) (formule de Newton).

Mais il y a ici une remarque importante à faire. Il est de toute nécessité que, dans 1, au voisinage immédiat de S, le fluide soit dans un état représenté par un point de la surface des faux équilibres limites. De là une condition de *compatibilité* spéciale. Dans tout ce Mémoire, nous laissons de côté en général les conditions pour que deux mouvements soient compatibles; toutefois celle qui se présente ici est si importante et a un sens physique si net que nous devons en dire un mot. On voit qu'elle peut s'exprimer ainsi : g étant toujours nul aux points de 1 qui précèdent immédiatement l'onde, on doit avoir

$$(34)\quad \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial t} + \frac{d\mathrm{P}}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{d\rho_1}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{d\alpha_1}{d\mathrm{P}} + \frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}_1}{d\mathrm{P}}\right) = 0,$$

et cette équation doit donner, pour $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$, la même valeur que (30) ou (31).

On peut remarquer d'ailleurs que *l'équation* (34) *s'appliquerait même si l'on rejetait l'hypothèse exprimée par l'équation* [(19), I] *et si l'on admettait que la vitesse de réaction* $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ *dépend non seulement de* ρ, α, T *mais encore de* $\frac{\partial T}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Si l'on agissait ainsi, il serait impossible d'appliquer la méthode d'Hugoniot et de parvenir aux formules (30) et (31); mais il faudrait toujours écrire (34).

29. 2° *Cas des corps à réaction vive se maintenant sur la surface* (a). — Il ne faut pas songer ici à appliquer le n° **19**, parce que l'équation $g = 0$ n'est pas vérifiée dans toute la région 1 et qu'il est, par suite, impossible d'écrire l'équation (16) sous la forme (23).

Mais il est bien certain que, comme au numéro précédent, (34) est toujours valable : on a ainsi une valeur de la vitesse de propagation, mais une valeur qui contient toutes les dérivées partielles de ρ_1 et de T_1.

Il est possible de trouver de cette vitesse une expression qui contienne moins de dérivées. Partons de (34) et écrivons-la, en posant $J = -\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial T}\frac{\partial T_1}{\partial t}\right)$,

$$(35) \qquad \frac{dP}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{d\rho_1}{dP} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{d\alpha_1}{dP} + \frac{\partial g}{\partial T}\frac{dT_1}{dP}\right) = J.$$

Dans le mouvement 2, on a toujours et partout $g = 0$; cette équation est vraie à chaque instant non seulement au front de l'onde, mais encore en un point situé en arrière, sur la normale à S, à une distance dP. On peut donc écrire

$$(36) \qquad \frac{dP}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{d\rho_2}{dP} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{d\alpha_2}{dP} + \frac{\partial g}{\partial T}\frac{dT_2}{dP}\right) = 0.$$

Retranchons (36) de (35); il vient

$$(37) \qquad \frac{dP}{dt}\frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{dR}{dP} + \frac{dP}{dt}\frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{dA}{dP} + \frac{dP}{dt}\frac{\partial g}{\partial T}\frac{d\Theta}{dP} = J.$$

Associons cette égalité à (8) et à (13). Entre (8), (13) et (37), nous

ne pouvons pas éliminer $\frac{dR}{dP}$, $\frac{dA}{dP}$, $\frac{d\Theta}{dP}$. Laissons donc

$$\frac{dR}{dP} = \frac{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\partial \rho_2}{\partial t}}{\frac{dP}{dt}} = \frac{\frac{\partial R}{\partial t}}{\frac{dP}{dt}}$$

et éliminons $\frac{dA}{dP}$ et $\frac{d\Theta}{dP}$. On obtient, si les mouvements sont adiabatiques,

$$(38) \qquad \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2\right]\frac{\partial R}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial \alpha} & \frac{\partial p}{\partial T} \\ r_\rho \frac{\partial R}{\partial t} & r_\alpha & c \\ \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial R}{\partial t} - J & \frac{\partial g}{\partial \alpha} & \frac{\partial g}{\partial T} \end{vmatrix} = 0,$$

et, si le gaz est bon conducteur,

$$(39) \qquad \begin{vmatrix} \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{1}{L^2+M^2+N^2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2\right]\frac{\partial R}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial R}{\partial t} - J & \frac{\partial g}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces expressions contiennent les dérivées $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$, $\frac{\partial T_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$. Toutefois, dans le cas des mouvements adiabatiques, $\frac{\partial T_1}{\partial t}$ s'exprime en fonction de $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$ par

$$r_\rho \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c\frac{\partial T_1}{\partial t} = 0,$$

de sorte que les seules dérivées contenues dans J et dans $\frac{dP}{dt}$ sont $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$.

La formule (38) est, en somme, sous une forme différente, la formule (24) du Chapitre XI de la *Thermodynamique générale* de Robin.

On peut remarquer que, dans le cas des transformations adiaba-

tiques, il y a, dans le mouvement 2 comme dans le mouvement 1, une relation entre la pression et la densité de chaque élément, mais que la forme de cette relation, variable d'ailleurs d'un élément à l'autre, n'est pas la même, pour un même élément, dans 1 et dans 2. L'étude de la propagation d'une onde séparant deux tels mouvements était pour Robin, le premier qui l'a faite, un problème nouveau, ainsi qu'il l'a dit lui-même ([1]). Mais la méthode susceptible de le résoudre, la méthode d'Hugoniot, existait avant que le problème ne fût posé. La manière dont Robin l'a appliquée prête à une critique grave, qui a été faite par M. Duhem : elle suppose implicitement au fond que tous les éléments, quand ils sont atteints par l'onde chimique, sont dans le même état. La marche que nous avons suivie n'est pas sujette à cette objection.

50. Les formules (38) et (39) sont assez compliquées. On tire parfois parti plus aisément de (34) *qui a d'ailleurs l'avantage de s'appliquer à des cas beaucoup plus étendus* (**28**). Nous nous placerons, pour le faire, dans un problème très particulier mais qui n'en donne pas moins des indications intéressantes.

Supposons que le gaz soit enfermé dans un tube rectiligne dirigé suivant Ox, indéfini d'un côté, fermé par un piston Q de l'autre. Supposons aussi que l'état initial soit un état de repos et d'équilibre chimique *homogène*. Nous supposerons, en outre, que la force $\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$ est négligeable. Les mouvements vont se faire par tranches parallèles au plan yz et les équations [(2), I] et [(18), I] se réduiront à

$$(40) \qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{r}{\dfrac{\partial x}{\partial a}}, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial a} = - r \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Le mouvement 1 va être provoqué par la mise en mouvement du piston Q et il sera supposé adiabatique. Ce sera un mouvement qui se

([1]) ROBIN, *loc. cit.*, p. 203.

propagera dans l'état de repos initial (nous allons le vérifier tout à l'heure) et qui amènera progressivement l'état de chaque élément fluide en un point de la surface $g = 0$. Le mouvement étant adiabatique, α étant constamment nul et l'état initial étant le même pour tous les éléments, il est évident que tous les éléments, quand ils atteindront la surface $g = 0$, seront rigoureusement dans le même état ρ, α, T. La vitesse que donne (34) sera donc exactement celle avec laquelle un état bien déterminé ρ, α, T avance dans le mouvement 1 défini comme on vient de le faire. Or cette vitesse peut se trouver facilement en décomposant, suivant une méthode indiquée par Hugoniot [1], le mouvement 1 en mouvements élémentaires.

Traitons pour cela le problème suivant :

Prenons le gaz et le piston se déplaçant tout d'une pièce dans le tuyau, d'un mouvement uniforme représenté par

$$x = \mathrm{H}a + \mathrm{V}t + \mathrm{K}. \tag{41}$$

La vitesse est V, la densité $\rho_0 = \frac{r}{\mathrm{H}}$; elles sont les mêmes pour tous les points, et la température T_0 est aussi supposée uniforme.

Changeons maintenant la vitesse du piston Q, faisons-la passer de V à $\mathrm{V} + d\mathrm{V}$. Un mouvement va naître au contact de Q, qui se propagera dans le mouvement (41) et qui sera défini, comme on va le vérifier, par une équation de la forme

$$x = (\mathrm{H} + \mathrm{H}')a + (\mathrm{V} + \mathrm{V}')t + \mathrm{K} + \mathrm{K}'. \tag{42}$$

La densité est devenue

$$\rho_0 + d\rho = \frac{r}{\mathrm{H} + \mathrm{H}'},$$

d'où

$$\mathrm{H}' = -\mathrm{H}\frac{d\rho}{\rho_0}.$$

---

[1] Hugoniot, *Sur la propagation du mouvement dans les corps* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIIIe Cahier, p. 15 et suiv.).

La température a crû de dT donné par $r_\rho dT + c\,dT = 0$, puisque les mouvements sont adiabatiques. Dans tout le mouvement (42), la densité et la température sont les mêmes, donc aussi la pression (rappelons que la variable α ne change pas). D'ailleurs $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ est nul partout. Donc (42) vérifie bien (40), ce qui est une première condition nécessaire.

Il faut en outre que (42) s'accorde avec la condition aux limites imposée par le mouvement du piston Q; il faut donc que

$$V + V' = V + dV$$

ou

$$V' = dV.$$

Il faut enfin que (42) soit *compatible* (au sens d'Hugoniot) avec (41). Or (42) se raccorde avec (41) au point d'abscisse a donnée par

$$(H + H')a + (V + V')t + K + K' = Ha + Vt + K.$$

Ce point se déplace, par rapport au champ de Lagrange, avec une vitesse $\frac{da}{dt} = -\frac{V'}{H'} = \frac{\rho_0}{H}\frac{dV}{d\rho}$. Pour que (42) soit compatible avec (41), il faut que cette vitesse soit égale à la vitesse du son calculée par la formule (20) : en effet, par rapport à des axes animés de la vitesse V, la propagation de (42) n'est autre chose que la *propagation d'un petit mouvement*. On doit donc écrire

$$-\frac{V'}{H'} = \frac{\rho_0}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\substack{\rho=\rho_0\\ T=T_0}}},$$

ce qui détermine H' [1].

Ainsi donc, (41) étant donné, dV aussi, on voit que H' et V' se déterminent facilement. Quant à K', il dépend du choix de l'origine du temps. C'est donc bien un mouvement de la forme (42) que détermine l'accroissement de vitesse dV du piston Q.

---

[1] On peut se reporter au Mémoire d'Hugoniot si l'on trouve que les considérations ci-dessus manquent de rigueur.

Ce problème préliminaire traité, imaginons que le gaz et le piston soient d'abord immobiles dans le tuyau, l'état initial étant homogène. Mettons ensuite le piston en mouvement. Considérons le mouvement de Q comme formé par des acquisitions successives de petites vitesses; ainsi, de zéro, la vitesse passe à dV, puis à $2dV$, etc. A chacune des valeurs de la vitesse correspond, par les raisonnements qui précèdent, un mouvement (42) dans lequel ρ et T ont des valeurs bien déterminées et ces divers mouvements se propagent les uns dans les autres avec les vitesses du son correspondant à leurs valeurs de ρ et de T.

Nous voyons ainsi que les mouvements du gaz susceptibles de se propager dans l'état de repos homogène ou, comme on dit, les mouvements compatibles avec le repos, sont formés par la superposition d'intégrales de la forme (42).

On peut encore énoncer ce résultat de la façon suivante. Une intégrale quelconque $x(a, t)$ des équations (40) peut se représenter, en prenant a, t, x comme coordonnées, par une surface; les mouvements (42) sont représentés par des plans, et un mouvement susceptible de se propager dans l'état de repos du gaz est représenté par l'enveloppe de ces plans, soit par une surface développable. Nous supposerons, pour éviter toute singularité, que, dans ce mouvement, les ondes élémentaires successives, qui séparent les divers mouvements (42), ne se rejoignent pas, c'est-à-dire que le point représentatif du mouvement ne traverse pas l'arête de rebroussement de la surface développable.

Il est dès lors évident, par ce qui précède, que la vitesse avec laquelle un état *bien déterminé* du fluide avance dans les mouvements compatibles avec le repos est la vitesse du son $\frac{\rho}{r}\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{r\rho}{c}\frac{\partial p}{\partial T}}$ correspondant à l'état ρ, T.

Dans ce cas particulier, par conséquent, la formule (34) donne pour vitesse de la flamme celle du son. Ce résultat montre qu'un mouvement 1 défini comme on vient de le faire, c'est-à-dire un mouvement 1 adiabatique et *compatible avec l'état de repos homogène*, peut être *compatible avec la propagation, en arrière de lui, d'une flamme obéissant à la loi* (30). Il peut l'être également avec *la pro-*

pagation d'une flamme suivant la loi (38); il suffit que $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$ ait une valeur telle que (38) donne, pour $\frac{dP}{dt}$, la vitesse du son.

La vitesse du son dont il s'agit ici est celle qui est relative au gaz dont la composition α ne varie pas; même avec la loi (38), l'élasticité chimique ne joue aucun rôle.

51. *Faits d'expérience.* — Les physiciens et les chimistes ont-ils observé quelques-uns des cas étudiés dans ce qui précède ?

Un bec Bunsen donne un exemple de flamme avançant dans un gaz en mouvement; la vitesse de la flamme est nulle dans le champ des variables d'Euler, mais non dans celui des variables de Lagrange. Même phénomène dans toutes les expériences sur l'écoulement, à travers un orifice en mince paroi, de gaz enflammés. (Bunsen, Mallard, Mallard et Le Chatelier.) C'est le même phénomène aussi qui a été observé par MM. Mallard et Le Chatelier dans des conditions mieux définies en étudiant la propagation de la flamme dans un tube de verre. Prenons les expériences de ces derniers auteurs. Que le gaz soit en mouvement avant la flamme, c'est ce qui résulte évidemment de la remarque suivante : l'inflammation, portée à l'extrémité ouverte d'un tube, fermé de l'autre côté, avance d'une manière qui varie avec la longueur du tube, au moins quand celle-ci ne dépasse pas une certaine limite [1]; ce fait ne peut s'expliquer que par l'action de l'extrémité fermée sur l'état de repos ou de mouvement du gaz en avant de la flamme. Il convient donc de chercher à appliquer ici les nos **27** à **50**.

Le mouvement du gaz avant la flamme peut être même très intense. L'observation donnant la vitesse dans le champ d'Euler, c'est-à-dire la résultante de la vitesse propre de la flamme et de la vitesse du gaz, on doit trouver des vitesses très variables suivant les cas. C'est ce que MM. Mallard et Le Chatelier ont observé dans la *période du mouvement vibratoire* [2]. Laissons de côté cette période et envisageons les premiers instants de la propagation, pendant lesquels la vitesse est

---

(1) Mallard et Le Chatelier, *loc. cit.*, p. 316.

(2) Mallard et Le Chatelier, *loc. cit.*, p. 355.

régulière. C'est la vitesse $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d\varpi_1}{dt} + u_1$ (I, **5**; nous sommes dans le cas des ondes planes) qui a été mesurée. Elle ne dépasse pas 20^m (¹) par seconde; comme u_1 ne doit pas être très grand en valeur absolue, il est plus que probable que $\frac{d\varpi_1}{dt}$ ne dépasse guère 40^m par seconde.

Le mouvement qui précède la flamme ne préexiste pas à l'inflammation : l'état initial du gaz dans le tube est un état homogène de repos et de faux équilibre chimique. Lors de l'inflammation, il se développe un mouvement 1 qui portera le gaz à la température d'inflammation. Il se peut que, dès le début, ce mouvement s'étende à toute la masse fluide, les fonctions x, y, z qui le représentent étant analytiques jusqu'à l'infini. Il se peut, au contraire, qu'il se propage par une *onde* dans l'état d'équilibre préexistant; comme cette onde a certainement [form. (20) ou (21)] une vitesse de plusieurs centaines de mètres par seconde, elle est toujours en avance sur la flamme, condition évidemment nécessaire au phénomène.

Imaginons d'abord que les transformations soient adiabatiques aussi bien en avant qu'en arrière de la flamme. La vitesse de la flamme est alors donnée par (38) ou (30) selon que le mélange est ou n'est pas à réaction vive. Mais (34) s'applique dans les deux cas et donne pour vitesse celle du son, du moins quand le mouvement 1 se propage par onde dans l'état d'équilibre préexistant (**30**), ce qui paraît bien être la réalité. Or le fluide immédiatement avant la flamme est aux environs de 500°, température d'inflammation; le son s'y propage avec une vitesse $\frac{d\varpi_1}{dt}$ de l'ordre de 500^m par seconde. Ce résultat paraît incompatible avec les mesures de Mallard et Le Chatelier et il est probable qu'il faut abandonner l'idée de l'adiabaticité des mouvements. Cette conclusion est bien d'accord avec l'opinion des deux savants ingénieurs qui font jouer à la conductibilité calorifique un rôle important dans le mode de propagation qu'ils ont étudié.

Supposons donc le mélange bon conducteur, ou plus exactement, comme le coefficient de conductibilité des gaz n'est pas à notre disposition, supposons les mouvements assez lents pour que la chaleur mise

---

(¹) MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 329.

en jeu par la conductibilité ne soit pas négligeable. Si le corps n'est pas à réaction vive, on a à la fois, pour déterminer la vitesse, les formules (31) et (34). La première donne la valeur que la formule de Newton attribuerait à la vitesse du son; c'est beaucoup trop pour les nombres expérimentaux et il faut rejeter cette hypothèse. Si le mélange est à réaction vive, on n'a plus que (34) pour déterminer la vitesse, (39) n'ajoutant rien de nouveau. Rien ne s'oppose à ce que cette formule donne une vitesse convenable, *et peut-être par conséquent le phénomène de Mallard et Le Chatelier consiste-t-il dans la propagation d'une onde ordinaire, avec réaction chimique, dans un mélange à réaction vive.*

Nous croyons que, dans les mélanges étudiés par MM. Mallard et Le Chatelier, le point ε existe sur la surface (a) (¹). L'expérience nous paraît prouver que, lorsqu'on élève la température d'un système où α est nul, on atteint la surface d'inflammation en un point *à partir duquel une combustion adiabatique à volume constant est possible;* cela exige qu'il y ait une zone $\mathrm{A}\varepsilon$. Dans les expériences de Mallard et Le Chatelier, quand le gaz arrive à la température d'inflammation, il doit donc se trouver en un état de cette zone. Malgré cela, si la conductibilité joue un rôle assez considérable dans le phénomène, on sait (I, 8) que le gaz peut brûler en restant sur la surface $g = 0$, c'est-à-dire que α peut varier d'une manière continue à partir de zéro, c'est-à-dire encore que la flamme peut très bien être, conformément à l'interprétation que nous venons de donner, une onde de l'espèce que nous étudions dans ce Chapitre. Mais il peut arriver aussi que la conductibilité joue assez peu pour que le gaz, à peine enflammé, brûle pour ainsi dire instantanément. Il y a alors une discontinuité brusque de la température à la traversée de l'onde et le problème sort du cadre du présent Chapitre, car les hypothèses du n° I n'y sont plus applicables.

(¹) Cette affirmation est en contradiction avec ce que dit M. Duhem (*Mécanique chimique*, t. I, p. 277) qui a cru nécessaire, pour expliquer les retards à l'inflammation des mélanges grisouteux, d'admettre que le point ε n'existe pas. Mais il ne faut pas oublier que notre surface (a) n'est pas exactement celle que considère M. Duhem; c'est en réalité la surface (A) de I, 7. Cette différence nous a permis de donner, des retards à l'inflammation, une explication que nous croyons assez bien en harmonie avec ce que Mallard et Le Chatelier disent des faits.

C'est à cette dernière interprétation du phénomène que se sont arrêtés MM. Mallard et Le Chatelier ([1]). Nous en dirons un mot dans le Chapitre suivant, mais nous verrons que nous ne parviendrons pas à prendre parti entre elle et celle que nous venons d'indiquer plus haut.

Examinons maintenant l'onde explosive et les phénomènes connexes. Le corps étant au début en repos et en faux équilibre non limite, il faut, comme on l'a dit, qu'un mouvement préalable à la flamme le porte à la température d'inflammation ; ainsi que dans les expériences de Mallard et Le Chatelier, ce mouvement peut s'étendre dès l'instant initial à toute la masse ; il peut aussi se propager dans le repos. Mais ce dernier cas n'est possible que s'il avance avec une vitesse au moins égale à celle de la flamme, soit avec une vitesse de 1000^m à 4000^m par seconde. Cela exige qu'il se propage par une onde de choc qui seule peut avoir une vitesse suffisante pour remplir cette condition ([2]).

Les expériences photographiques de M. Le Chatelier ([3]) ont montré que c'était bien ainsi que les choses se passaient. Faisons détoner une capsule de fulminate à l'extrémité d'un tube contenant le mélange explosif. Les photographies montrent que, dans les premiers instants, il se propage dans le tube une onde de choc suivie à quelque distance par une flamme, les vitesses étant d'ailleurs variables et de l'ordre de grandeur de 1000^m à 4000^m par seconde. Les vitesses mesurées sont les vitesses par rapport au champ d'Euler, mais celles qui se rapportent au champ de Lagrange, défini ici par l'état de repos initial, sont aussi de cet ordre de grandeur, et ce sont elles qu'il faut avoir en vue dans la discussion qui va suivre. Laissons de côté ici l'onde de choc : la propagation de la flamme dans le mouvement 1, compris entre cette onde de choc et la flamme même, peut être interprétée comme un phénomène soumis à la loi (30) ou à la loi (38), car il est bien probable, vu la rapidité des transformations, qu'elles sont adiabatiques. La loi (30) (corps à réaction ordinaire) donne la vitesse du son. Quant à la loi

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 343.

([2]) Vieille, *loc cit.*, p. 259.

([3]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, 1900, p. 1755.

(38) (corps à réaction vive) elle doit donner forcément la même valeur que (34). Or celle-ci donnerait la vitesse du son si le mouvement I remplissait les conditions du nº **30**. Il n'en est pas ainsi ici car l'onde de choc préliminaire ne fait pas forcément subir à tous les éléments matériels la même compression, de sorte que ces divers éléments s'engagent dans le mouvement I en partant d'états initiaux différents [1]. Mais il est probable qu'encore ici la vitesse du son donne une idée de l'ordre de grandeur de la vitesse. Or la vitesse du son [formule (20)] peut atteindre des valeurs très élevées parce que le fluide a été porté par l'onde de choc préliminaire à une densité élevée $\left(\frac{\rho}{r}\text{ est donc grand}\right)$ et à une haute température $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{r_\rho}{c}\frac{\partial p}{\partial \mathrm{T}}\text{ est donc grand, comme on peut le voir en calculant ce terme pour les gaz parfaits}\right)$. *Les formules* (30) *ou* (38) *peuvent donc expliquer les phénomènes mis en évidence par M. Le Chatelier dans la période d'établissement de l'onde explosive.*

Toutefois nous ne croyons pas que ce soit là leur véritable interprétation. Estimant toujours que la zone $\mathrm{A}\varepsilon$ existe sur (a), nous pensons qu'un gaz amené sur (a) par un mouvement au cours duquel α reste nul doit atteindre cette surface en un point de $\mathrm{A}\varepsilon$. Comme nous étudions les mouvements *adiabatiques*, et que nous estimons que les mélanges observés par M. Le Chatelier sont *à réaction vive*, la combustion qui se produit à partir de là ne laisse probablement pas le gaz sur la surface (a); elle rentre sans doute dans la catégorie des combustions instantanées. La flamme qui, dans les expériences de M. Le Chatelier, suit l'onde de choc est alors elle-même à nos yeux une surface de discontinuité pour T, α, ρ, u, v, w. Nous étudierons la propagation de telles surfaces dans le Chapitre suivant.

En général le régime que nous venons d'examiner ne dure pas longtemps. Au bout d'un certain temps, l'onde de choc et la flamme se réunissent. A ce moment sont lancées : en avant, l'*onde explosive* proprement dite ; en arrière, dans les gaz brûlés, une onde de choc [2]. Cette

---

([1]) *Voir* Chap. III, nº 17.

([2]) Le Chatelier, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXXI, p. 30.

onde de retour, pour le dire en passant, est pour nous un argument en faveur de l'idée que la flamme, dans la période d'établissement de l'onde explosive, est bien, comme nous l'avons admis, une onde avec discontinuité de ρ, α, T, u, v, w; en effet la réunion de la flamme avec l'onde de choc préliminaire se présente tout à fait comme doit le faire la réunion de deux ondes de choc [1]. Quant à l'*onde explosive proprement dite*, qui avance dans les gaz non brûlés, elle est constituée par la superposition d'une onde de choc et d'une flamme [2]; le mouvement préalable qui porte le gaz à sa température d'inflammation avant la transformation chimique (**24**) est ici confondu dans une même onde avec la transformation chimique. Cette onde explosive avance d'ailleurs, nous reviendrons là-dessus, avec une vitesse uniforme et non plus variable comme le faisait la flamme dans la première période du mouvement.

On voit l'importance des expériences photographiques de M. Le Chatelier. Elles permettent de définir avec précision, ce que nous n'avions pas fait jusqu'ici, l'*onde explosive* et de la distinguer de certains phénomènes de propagation à vitesses très grandes qui en sont nettement différents. Elles donnent un corps aux idées de MM. Schuster et Vieille et nous conduisent, comme ces idées, à l'étude des ondes de choc dans les gaz à variable chimique. Ce sera l'objet du Chapitre suivant.

---

(1) Il faut dire toutefois que cette interprétation des faits se heurte à une difficulté. « L'onde explosive, dit M. Le Chatelier, prend naissance à une certaine distance en avant de la flamme à vitesse variable. » Il semble toutefois que ladite interprétation soit une image approximative des choses.

(2) Le Chatelier, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, p. 1756.

A suivre.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME I.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME I DE LA SIXIÈME SÉRIE.

45819 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

